2012 第 期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE

中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387




09>
9 770488 738122

【编者按】孙泽瀛先生(1911-1981)是本刊的创始人. 为了纪念他的101年诞辰, 刊登华东师范大学数学系两位老师的回忆文章, 以示纪念.

怀念孙泽瀛先生

——写在孙泽瀛先生百年诞辰之际

200062 华东师范大学数学系 唐瑞芬 陈信漪

半个多世纪过去了, 孙先生离开我们也有30年了, 故人似乎渐行渐远. 但是我们觉得孙先生的影响至今仍然存在着. 作为他在华东师范大学时期的学生, 回忆点滴, 以纪念他的100周年诞辰.

孙先生的经历很不一般. 他1932年毕业于浙江大学数学系, 曾去日本跟随著名几何学家窪田忠彦攻读博士学位, 后因抗日战争爆发回国, 曾任重庆大学教授, 以后转去美国求学. 他1949年获美国印第安纳大学哲学博士学位后, 迅即回国, 受聘为上海交通大学数学系教授.

1951年华东师范大学筹建之际, 就专请孙泽瀛先生兼任华东师范大学数学系系主任. 1952年全国高校院系调整, 孙泽瀛先生正式调入华东师范大学. 他担任数学系系主任一职, 直至1958年调任江西大学数学系系主任为止, 前后历时六年多. 我们在此期间, 有幸和孙先生近距离地接触, 聆听他的见解, 得益良多.

记得在一次新生入学的开学典礼上, 孙先生谆谆教导学生, 数学系的学习应该是: 往上要理解数学的高深学问, 往下则要掌握扎实的数学基础. 对于一名数学教师来说, 也就是要"上通数学, 下达课堂", 这正是今天的数学教育所提倡的一项基本原则.

我们有幸亲聆孙泽瀛先生的教诲, 三年级时他教我们"近世几何学", 他的讲课表述清晰、语言简洁、条理清楚, 尤其是他的板书, 一节课结束, 黑板上留下的恰是一份体系严谨的内容概述, 整节课的头绪一目了然. 在他的课堂上, 我们知道了Klein的Erlangen纲领, 初次接触了变换群与几何学、不变性质与不变量, 为我们进一步学习、钻研几何学打下了坚实的基础.

在孙泽瀛先生的领导下, 五十年代的华东师大数学系成了几何的兴盛时代. 从开设的课程看, 一年级解析几何, 二年级初等几何, 三年级近世几何, 四年级几何基础; 这连续四年一贯的几何学习, 为未来的数学教师打下了扎实的逻辑基础, 培养了宽广的空间想象能力. 华东师大数学系的几何学教学成果, 也辐射到全国. 按照1950年的全国高师院校数学系不成文的课程建设分工, 北京师大负责代数(张禾瑞先生领衔)和初等数学研究(傅种孙先生领衔), 华东师大则负责分析(程其襄先生、李锐夫先生领衔)和几何(孙泽瀛先生领衔). 因此, 孙先生编写了《解析几何学》与《近世几何学》两本教材, 由高等教育出版社出版, 在当时的师范院校中具有广泛的影响. 1956年又在华东师范大学较早开设了培养高校师资的几何研究生班, 孙先生讲授"射影几何与射影测度"课程, 并采用英文原版作为教材, 为全国各地的高校输送了许多人才.

孙泽瀛先生为人热情、豪爽, 心直口快, 当年有人形象地描述数学系的正、副系主任说: 孙泽瀛先生是"方"的, 钱端壮先生是"圆"的, 彼此互补. 孙先生尽心培养年轻的后辈, 让刚毕业不久的青年教师参与"近世几何学"讲义的编写. 无论是教材内容还是有关习题, 都毫无保留地倾囊提供.

孙先生待人真诚、友好, 在他任系主任期间, 数学系教职工总会抽空聚餐或是共同出游, 同事之间坦诚相见、和睦共处. 回顾这些年, 我们数学系的小环境一直保持着健康、和谐的氛围, 师生、同事之间一直维系着团结、友爱的传统, 饮水思源, 乃是早年孙泽瀛先生所播下的种子.

孙先生在华东师大的6年中, 经历了1956年"向科学进军"的洗礼, 也受到了"反右斗争"的冲击. 在1958年的大跃进中, 他始终坚信自己对建设一流师范大学的信念: 既要抓好数学前沿的科学研究, 又要注意发展数学教育方向的建设. 因此, 他大声地宣称: "师范大学的科学研究要向综合性大学看齐". 现在看来, 这是理所当然的事情. 学术天平上没有师范与非师范之分. 但是在五十年代, 许多人强调"师范性", 主张一切为中小学服务, 师范大学要办到农村去, 到车间去, 尤其反对进行"脱离实际"的纯粹数学研究. 一时间, 甚至将"向综合性大学科学水平看齐"的观点, 提到了学校"方向路线"之争的高度. 孙先生自然受到了很大的压力. 可是他一直坚持着, 直到他奉调去江西大学(一所综合性大学)任教为止.

实际上, 孙先生在提倡高水平科研的同时, 也非常重视普及性的、为中小学教师服务的工作. 可以说, 孙先生切切实实地抓了师范大学的"师范性". 他不仅是口头提倡, 而且身体力行. 以下的两件事情给我们留下了深刻的记忆.

一件是1953年出版的科普读物《数学方法趣引》, 由孙先生主编. 书中介绍的柯克曼女生问题, 引起了东北师范大学物理系学生陆家羲(后来是包头市九中物理教师, 1935–1983)的注意. 1961年陆家羲完成《柯克曼四元组系列》论文, 后专攻"斯坦纳系列", 创造出独特的引入素数因子的递推构造方法, 完成总题目为《不相交的斯坦纳三元系大集》等七篇论文, 解决了国际上组合设计理论研究中多年未解决的难题. 不幸的是陆家羲于1983年10月31日在包头病故. 1987年, 国家追授他获得国家自然科学一等奖. 孙先生和陆家羲虽然未曾谋面, 这件事却成为当代中国数学史上的一段佳话.

另一项影响深远的面向中学的大事, 就是《数学教学》杂志的创办. 1955年, 正当国家号召"向科学进军"的时刻, 他一面倡导科研论文的发表, 一面倡议和主持《数学教学》的创办, 他认为这是师范大学应当为中小学老师做的一件实事! 半个多世纪过去了, 这份杂志的编辑出版方针, 依然维持着当年的宗旨: 立足上海, 面向全国, 服务读者, 没有被功利性的应试教育浪潮所吞没.

先辈已远去, 但亲切的教诲依然历历在目、声声入耳, 在脑海深处留下了永远的铭记. 在孙先生100周年诞辰之际, 愿借《数学教学》一角, 发表以上的文字, 以作纪念.

(上接第9–27页)

当 $b \neq 2$ 时, 要证 $a_n \leqslant \dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$, 只需证 $\dfrac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n} \leqslant \dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$,

即证 $2^{n+1}n \leqslant \left(\dfrac{2^{n+1}}{b^n}+b\right)\dfrac{b^n-2^n}{b-2} \cdots\cdots (*)$

而 $\left(\dfrac{2^{n+1}}{b^n}+b\right)\cdot\dfrac{b^n-2^n}{b-2}$

$$= \left(\frac{2^{n+1}}{b^n}+b\right)(b^{n-1}+2b^{n-2}+\cdots+2^{n-1})$$
$$= 2^{n+1}b^{-1}+2^{n+2}b^{-2}+\cdots+2^{2n}b^{-n}+b^n +2b^{n-1}+\cdots+2^{n-1}b$$
$$= (2^{n+1}b^{-1}+2^{n-1}b)+(2^{n+2}b^{-2} +2^{n-2}b^2)+\cdots+(2^{2n}b^{-n}+b^n)$$
$$> 2\sqrt{2^{2n}}+2\sqrt{2^{2n}}+\cdots+2\sqrt{2^{2n}}$$
$$= n\cdot 2^{n+1} (b>0 \text{且} b\neq 2),$$

所以不等式(*)成立, 从而原不等式成立(等号成立当且仅当 $b=2$).

同样的方法可以证明如下 n 次幂不等式: 已知 $a>1$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$, 证明: $a^n-\dfrac{1}{a^n}>n\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$.

小结: 数列类的不等式, 如果不含 n 次幂, 一般可以将数列类的不等式转化成可以运算的式子, 通常构造式子的标准就是最终可以将式子化简; 如果证明的式子含有 n 次幂, 一般不需要构造外部式子, 只需要利用自身的特点(常常首尾相互配对), 逐个考察 n 个因式, 问题就能快捷解决.

参考文献

[1] 刘绍学. 普通高中课程标准实验教科书 数学(选修4-5)不等式选讲[M]. 北京: 人民教育出版社, 2007.

新课程理念下中美两国“三角函数”教材的比较研究

214221 江苏省宜兴市丁蜀高级中学 周 军

1. 问题的提出

三角函数是中学数学教学的重要内容之一，它是学生进一步学习解析几何、向量、复数等内容的基础，也是工程测量、电磁学等领域必不可少的知识工具.

学习三角函数的所需基础主要是几何中的相似形和单位圆，主要用代数方法来研究它. 因此，三角函数的学习，能使学生更好地将代数与几何联系起来，促进学生数形结合思想的形成，对学生数学应用意识的培养也有着不可替代的作用. 笔者选取了由美国Holt, Rinehart and Winston公司出版的Algebra教材与上海教育出版社出版的《高级中学课本数学(试用本)》(以下简称“上教版教材”)，就两本教材中三角函数部分的知识结构、知识的呈现过程与方式、数学文化的传承、数学与现代信息技术的整合、例题与习题等方面逐一进行比较. 选取这两套教材进行比较的原因如下：两套教材均具有一定的地域代表性. 虽然美国至今还没有统一的国家数学课程标准，不同的州制定各自的指导准则，但Algebra教材却凭借着其广泛的适用性以及实用性被纽约、奥兰多等经济发达地区选作高中数学教材. 上教版教材也是在上海这个中国的经济中心被使用. 两套教材均能反映各自国家课改的最前潮. Algebra教材几经修订，其2007年的最新版本较能体现NCTM (全美数学教师协会)在《Principles and Standards for School Mathematics》(《学校数学的原则和标准》)中所倡导的数学教育理念与教育思想. 上教版二期课改教材的编写，依据的是《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》，该教材是2006年开始在上海全面使用的，之后又进行了一些修订，这也是我国高中数学教科书编写的一次有益尝试. 可以说，这两套教材都是中美两国数学教育界在新课程背景下的产物，并且都有一定的地域代表性，这就决定了它们的可比性较高.

2. 教材的具体比较

2.1 知识结构

上教版教材的“三角函数”内容集中在教材的第五章(三角比)以及第六章(三角函数)，而Algebra教材的“三角函数”内容主要分布在第四章(The Trigonometric Functions)和第五章(Analytic Trigonometry). 虽然相关章节在名称的表达上略有差异，不过通过对比仍可发现，共同或比较接近的内容包括：弧度制和弧长的测量；三角函数的定义；三角函数的性质和图像；三角恒等变换(包括诱导公式)；三角函数的模型及其简单应用；基本三角恒等式；二倍角及半角的余性、正弦和正切；反三角函数；解三角方程.

上教版教材对三角函数的图像和性质做了重点介绍，而美国Algebra教材在这方面就稍显逊色，然而它以大提琴家、钢琴师演奏的音乐等实际例子引出了三角函数的叠加. 这反映了两国教材的编写者对本国学生知识、技能、能力要求的侧重点不同——我国教材强调知识的学术形态，力图帮助学生打下坚实的学科基础；美国教材注重知识的实际应用，重视帮助学生构建宽广的学科视野. 对于三角函数的周期性、单调性、奇偶性、有界性等性质，Algebra教材往往是一笔带过，甚至一些三角恒等式仅以练习题的形式出现，对这些性质的专项训练题几乎没有；上教版教材对这些知识的要求比较高，除了课本中对这些性质所作的系统介绍外，课后练习以及与教材配套的练习册上还有不少针对这些知识点的习题. 这主要是由于我国现行的评价体制，学生为了在考试中取得好成绩，必须进行大量习题的训练；

而美国的学生和教师就不必考虑这些, 处于相对"愉快的学习"之中.

上教版教材除了仅有的两个探究和实践环节外, 很少跳出纯数学的范畴去讨论三角函数与其他学科以及生活实际的联系; 相比之下, Algebra教材则比较注重三角函数知识与物理、化学、生物、经济、交通、环境、医学等学科的联系, 通过月亮圆缺变化的周期性、钟表的时针与分针的转动、交流电的电流变化、海水的潮汐现象、人的情绪与体力变化规律、夏天居民用电情况、包含三角函数知识的著名摄影作品、大阳黑子的爆发、游乐场的摩天轮、飞机降落、长笛和大提琴的音节、汽车比赛、停泊海港的船的波动等与现代社会生活密切相关的事例, 使学生充分感受到数学与生活是息息相关的, 这样的安排融科学性、知识性、趣味性于一体, 学生沉浸在丰富多彩的数学应用世界里, 自然是学得有趣, 记忆深刻, 无形间学生的数学应用能力与应用意识得到了培养.

2.2 知识的呈现过程与方式

尽管两本教材的内容相似, 但其给人的感觉却不尽相同, 这很大程度上是由于两本教材向学生呈现数学知识的过程与表述方式上存在差异.

Algebra教材向学生传达知识的过程是: Who/Why式提问——具体的问题情境——新知识——例题——思考与讨论——练习与应用; 而上教版教材基本的学习过程是: 具体的问题情境——新知识——例题——课后练习 (探究与实践). 通过对比可以发现, Algebra教材比上教版教材多了Who/Why式提问以及应用这两个环节. 这里的Who/Why式提问指的是每节的开头部会出现的"Who use this?" (哪些人在使用?) 与 "Why learn this?" (为什么学习?). 这使得学生在开始学习之前就能对学习知识的原因以及知识的应用范围有大致的了解, 拉近了数学与学生之间的距离, 同时激发起学生浓厚的学习兴趣, 促进良好学习动机的生成. 至于"练习与应用", 与一般的课后练习相比则是强调了应用性, 如Physics-vibrations (物理学上的震动), Blood pressure (血压), Satellite location (卫星位置), Height of a Ferris wheel (摩天转轮的高度), Water wave (水波), Electrical current (电流), Predator-prey model (捕食者与被捕食者的追逐模型) 等内容, 均取材于现实中的实际问题, 这样的处理不仅使学生充分认识到"宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁, 无处不用数学", 而且反过来又能用其解决实际生活中存在的问题, 使数学知识具体化, 易于学生理解, 无形中增强了学生从生活中学习数学的能力与兴趣.

另外, 两套教材在知识的呈现方式上也有较大差异. Algebra教材中使用图表的数量达到上教版教材的三倍之多. 图表是教材的直观组成部分, 它既是对教材形象化的解释和直观化的概括, 又是对教材内容的补充和延伸. 现代脑科学的研究表明: "人的左脑是通过语言、概念进行逻辑思维, 而人的右脑是通过感觉、表象进行直接思维." 通过图表, 能使理性问题感性化、抽象问题具体化、深奥问题通俗化, 一定数量的图表还能给学生的数学学习带来调节作用, 摆脱数学学习的枯燥感, 提高学生的学习兴趣, 激发学生的学习动机, 促进形象记忆.

2.3 数学文化的传承

注重数学文化在教材中的渗透, 这是Algebra教材的显著特色之一. 其教材编写者总是不失时机、尽可能地在三角函数内容中加上一些相关的摄影、绘画作品以及科学、历史知识, 以此来体现数学与现实世界、数学与其他学科之间的密切联系, 从而说明数学的科学价值和文化价值. 尽管上海二期课改的课程标准也强调了要"体现数学的文化价值", 但由于升学考试的影响以及课堂教学时间的限制, 上教版教材的编写依旧以知识的掌握为主要目标, 在整个三角函数部分, 除了弧度制思想提出者的介绍、数学家欧拉的简介以及"离离原上草, 一岁一枯荣"这一反映月盈月亏周期现象的诗句外, 很难再找出与数学文化有关的内容. 下面是Algebra教材中三角函数部分所涉及的数学文化内容:

例如在有关三角函数周期性部分, 介绍了摄影师Eadweard J. Muybridge发明的投影动

物运动的旋转盘; 在角的度量部分介绍了美国艺术家Penny Cerling的作品《黑洞与大爆炸》、日本横滨宇宙乐园中的摩天轮、角度制的起源; 在正弦函数部分介绍了荷兰数学家Andreas Cellarius著作《宇宙和谐》中的月相图、多普勒效应、伽利略与单摆的等时性; 在有关三角恒等式部分介绍了倒数函数的历史; 在反三角函数部分介绍了偏光镜; 在和角三角函数部分介绍了著名旅美华裔大提琴家马友友和调音问题.

2.4 数学与现代信息技术的整合

《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》虽然强调要"加强现代信息技术的应用, 促进信息技术与数学课程的整合", 并首次明确提出了基于现代信息技术的数字化数学活动(简称DIMA平台)的概念, 但对于三角函数的教学内容, 上教版教材并未提及与信息技术相整合的指导意见, 也缺乏现代信息技术辅助教学的案例; Algebra教材在不少章节中都设置了New Technology (新技术)这一板块, 从具体的操作层面上指导教师和学生在课内或课后利用图形计算机(器)等现代信息技术进行三角函数知识的探究与验证. 这使得数学与现代信息技术得到了有机整合, 对学生探究能力的培养作用巨大.

2.5 例题与习题

Algebra教材每节设置的例题不多, 很少会多于五道, 题目的难度也不大, 类型以计算与证明为主. 在例题的讲解中, 穿插介绍一些知识点, 如在教材的5.5 The Graphs of Sine and Cosine (正弦函数与余弦函数的图像)中, 通过画两个函数的图像, 介绍了振幅、相位移、频率等概念, 接着又介绍了一组诱导公式: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$. 为了及时巩固介绍的新概念与新公式, 书本紧接着配置了下面的题: 找出与下面每一个函数有相同图像的函数, 并且证明这些是正确的:

(1) $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

(2) $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

(3) $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

(4) $y=\cos(-x)$; (5) $y=\sin(-x)$;

(6) $y=\tan(-x)$; (7) $y=\sin(x+2\pi)$;

(8) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; (9) $\tan(x+\pi)$.

对于例题与习题的设置, Algebra教材让人感到其知识点分散、零乱, 与上教版教材中知识介绍的系统性以及概括性反差很大, 中国的教师和学生可能会对其感到不太适应; 上教版教材的例题与习题数量设置得较多, 难度也比Algebra教材要大得多. 上教版教材设置的题目类型偏重于演绎推理、运算、证明, 探究型的题目比较少, 仅有的几道探究题难度又比较大, 让学生有"丈二和尚摸不着头脑"的感觉. 如果把中美两国教材的内容看作一篇文章的话, 那么中国的教材像是一篇构思严谨、环环相扣、论证周密的议论文, 而美国的教材更像是一篇洋洋洒洒、轻盈明快、形散而神不散的散文.

3. 启示与思考

通过Algebra教材与上教版教材关于以上各点的比较, 不难得到一些启示.

3.1 数学教材应将科学性、严谨性、知识性与趣味性相结合

上教版教材应适当汲取Algebra教材中对知识趣味性高度重视的优点, 加大增设数学文化与数学史内容的力度. 当然, 在让学生感受数学趣味性的同时, 我们也需坚持"勤勉拼搏"的优良传统, 即让学生体会一定的数学学习的艰苦性, 并让学生认识到, 在学习过程中常常会遇到严峻的挑战, 他们应该具有足够的信心与勇气去克服困难, 经过自己的拼搏, 就更能体会数学的美学价值, 获得成功的喜悦感受.

3.2 数学教材要注重数学内部与外部之间的相互联系

数学教材既要保证数学知识体系间的完整性、系统性、逻辑性, 也要注重与其他学科以及社会生活各方面的密切联系, 使学生体会到数学与自然界以及人类社会的关联, 增进学生对数学的理解和应用数学的信心. 学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会, 去解决日常生活中的问题, 进而形成勇于探索、勇于创新的科学精神, 获得适应未来社会生活和进一步发展所需要的重要数学事实、基本的思

不要满足“第一答案”的安慰

——听课及听课后的调查引发思考

211400　江苏省仪征中学　花　奎

应市教研室的邀请，笔者参加了市里组织的高三教学督导听课. 其中，一位数学老师的一个教学片段让人深思.

教学片段实录:

教师出示题目(这是一节“三角变换与解三角形”的复习课，课前教师已将复习讲义发给学生，此题为讲义上例题):

在斜三角形中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $\dfrac{b^2-a^2-c^2}{ac}=\dfrac{\cos(A+C)}{\sin A\cos A}$. (1) 求角 A; (2) 若 $\dfrac{\sin B}{\cos C}>\sqrt{2}$，求角 C 的取值范围.

师: 这道题考查三角变换与解三角形的知识，该怎么做呢? 我们请学生A上黑板板演，其他同学在下面做.

生A: (1) 由余弦定理可知，在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

想方法和必要的技能. Algebra教材在数学知识与外部联系方面的设置值得我们借鉴.

3.3 数学教材的逻辑体系要归纳、演绎相配合

上教版教材在编写上主要以知识的系统性和学生的认知规律为基础，先学习知识，再结合实际生活解决一些问题，教材编写以演绎的逻辑体系为主，学生使用的是下位学习方式; 而Algebra教材则以实际问题的求解为中心，通过问题的求解来获得知识，再反过来解决更多的实际问题，教材编写以归纳的逻辑体系为主，学生使用的是上位学习方式. 上教版教材的体系应在保证数学知识严密性的基础上适当地融入归纳方法，避免过多的灌输.

3.4 数学教材应有效整合新技术

总体来说，上教版教材正渐渐重视数学与新技术的整合，例如，在函数这一章中，设置了“借助计算器观察函数递增的快慢”一节内容，《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》也明确指出要“以现代信息技术的适当介入为手段处理课程内容”. 然而，目前许多一线教师对新技术的掌握力度不够，无法较好地实施数学教学与新技术的有效整合. 为此，相关教育部门要组织教师进行必要的技术培训，或者为教师提供技术支持，否则，教材中的一些好想法只能是空中楼阁.

4. 结束语

对待国外教材中所体现的数学教育思想，我们应当采取“洋为中用”的态度. 在继承和发扬我国数学教材编写的优良传统的同时，也应该予以适当更新. 笔者相信，加强我国与其他各国之间相互的学习与交流，对于提高我国数学教材的编写水平以及继续推进教育改革都具有非常重要的意义.

参考文献

[1] National Council of Teachers of Mathematics. Principles and Standards for School Mathematics [M]. Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

[2] 上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准(试行稿) [M]. 上海: 上海教育出版社, 2004.

[3] 贾晓华. 中美高中数学课程标准比较研究 [D]. 西北师范大学, 2009.

已知条件 $\frac{b^2-a^2-c^2}{ac}=\frac{\cos(A+C)}{\sin A\cos A}$ 可转化为 $-2\cos B=\frac{\cos(A+C)}{\sin A\cos A}$.

又 $A+B+C=\pi$, 得

$-2\cos B=\frac{-\cos B}{\sin A\cos A}$,

化简为 $2\sin A\cos A=1$, 即 $\sin 2A=1$.

解得 $A=\frac{\pi}{4}$.

(2) 由 $A=\frac{\pi}{4}$ 得 $B+C=\frac{3\pi}{4}$.

由 $\frac{\sin B}{\cos C}>\sqrt{2}$ 得 $\frac{\sin(\frac{3}{4}\pi-C)}{\cos C}>\sqrt{2}$,

$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C}{\cos C}>\sqrt{2}$,

$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tan C>\sqrt{2}, \tan C>1$.

所以角 C 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

师: 你做得太完美了! 你能告诉我们是怎么想到的吗?(其实学生A做得不是很完美, 如在由 $-2\cos B=\frac{-\cos B}{\sin A\cos A}$ 转化得到 $2\sin A\cos A=1$ 时, 没有写明为什么两边可以约去 $\cos B$)

生A(很得意): 第一问要求角 A, 因此我借助余弦定理将边化为角, 从而得到关于角 A 的三角方程就可以了; 第二问要求角 C 的取值范围, 而条件给出关于角 B、C 的不等式 $\frac{\sin B}{\cos C}>\sqrt{2}$, 就想到借助 $B+C=\frac{3\pi}{4}$ 消去 B, 得到关于角 C 的不等式就可以了.

师: 说得太好了! 同学们没有什么问题了吧!(从老师的表情可以看出, 他希望同学们没有问题, 只不过形式上问问而已)

这时, 学生B疑疑惑惑地站了起来.

生B: 老师, 我也是利用消元, 只是没有化成正切形式, 而是化成一个三角函数的形式来做, 但是算出来的答案和这个结果不一样.

师: 答案肯定是 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. 如果你也是消元处理的, 那一定是你算错的. 由于时间关系, 我们就不看你的计算过程了. 你课后再认真算一算吧! 一定要提高计算能力呀!

于是, 生B茫然不解地坐下了, 后面该教师就进行其他问题的讲解了.

课后访谈调查:

课后, 笔者分别找到学生A和学生B.

笔者问生A: 你对你这道题的解题过程满意吗?

生A(很骄傲): 还可以啦!

笔者: 你有发现你的解题过程有不完善的地方吗?

生A一愣: 应该没有吧?!

笔者: 你在解第一问的过程中由 $-2\cos B=\frac{-\cos B}{\sin A\cos A}$ 转化得到 $2\sin A\cos A=1$, 为什么两边可以约去 $\cos B$ 呢?

生A连连点头, 是有不完善的地方.

笔者问生B: 你发现你的计算错误了吗?

生B: 没有! 我都重做两遍了, 总觉得没有错. 我也不知道原因是什么?

笔者: 能让我看一下吗?

于是, 学生B让我看了他的解法.

学生B解题过程如下:

由(1)知 $A=\frac{\pi}{4}$, 因为 $A+B+C=\pi$, 所以 $B+C=\frac{3\pi}{4}$.

由 $\frac{\sin B}{\cos C}>\sqrt{2}$, 得 $\frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-C\right)}{\cos C}>\sqrt{2}$,

即 $\sin\left(\frac{3}{4}\pi-C\right)>\sqrt{2}\cos C$,

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C>\sqrt{2}\cos C$,

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C>0$, 即 $\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)>0$,

由此不等式得 $c-\frac{\pi}{4}\in(0,\pi)$, 又因为 $C\in\left(0,\frac{3}{4}\pi\right)$, 所以 $C\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

可以发现学生B的解题过程中, 由 $\frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-C\right)}{\cos C}>\sqrt{2}$ 化为 $\sin\left(\frac{3}{4}\pi-C\right)>\sqrt{2}\cos C$ 时是一个不等价变形过程, 因此出错. 笔者正准备引导他发现错误的原因, 这时, 他前面的学生C在旁边插话了.

生C: 我和学生B的做法是差不多, 但我的结果和老师的答案一样, 真奇怪呀!

在学生C的解题过程中, 将已有错的 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C>0$, 转化为 $\sin C>$

$\cos C$后得$\tan C>1$, 又因为$C\in\left(0,\dfrac{3}{4}\pi\right)$,

所以角C的取值范围为$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

从生C的解题过程可以看到同一个错误在一个解题过程中出现两次. 将$\sin C>\cos C$转化为$\tan C>1$也是一个不等价变形, 真是“错错得正”呀!

笔者有一种感觉, 对于这道题, 一定有不少学生存在问题. 于是, 笔者找到课代表, 请他收两组学生讲义给笔者调查统计一下.

课代表共收了24份的讲义, 笔者对这道题进行了简单的统计. 得到正确答案$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$的有17人, 得到错误答案$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$的有5人, 还有2人完全做错或不会; 在17个得到正确答案中有5人解题过程有错, 其中有3人和学生C所犯错误一样, 另外2人的解题过程也存在错误: 由$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos C>0$得$\sin\left(C-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$, $C-\dfrac{\pi}{4}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $C\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$, 又因为三角形是斜三角形, 所以$C\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

这两个学生不仅犯了学生B的错误, 还误将斜三角形理解为锐角三角形了.

感想:

笔者听了这节课及通过课后的访谈、调查, 心里久久难以平静, 总想说点什么!

1. 不要满足“第一答案”的安慰

在课堂上, 如果教师仅仅是为了寻找唯一的标准答案, 而不是真正对学生的观点或想法感兴趣, 那么聪明而不墨守成规的学生什么也不会说, 较差的学生因为不希望被人发现他们不知道那个“唯一的”答案也不愿意回答. 因此, 课堂上一个问题的提出, 教师寻找的应是学生的不同回答, 而不是唯一的答案.

2. 课堂应重视学生反馈信息

教学是双边活动, 教学中应用反馈原理十分重要. 对学生来说, 反馈信息可使学生强化正确意识, 改正错误, 找出差距, 促进努力; 对教师来说, 可使教师掌握情况, 了解情况, 改进教学, 找出不足, 因材施教. 但是在实际课堂教学中, 经常可以看到因学生回答问题时不合预定要求, 教师怕时间不够和打乱教学计划, 不去分析学生的思维动向和心理状况, 不去分析学生为什么这样想? 这种想法是否带有普遍性? 价值如何? 没有让学生充分陈述自己的见解, 最后教师把自己或优秀学生的意见“灌输”给所有学生, 其结果“窒息”了学生富有创造性的思想, 抑制了学生的积极性. 如本节课中教师用$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$判定学生是计算出错, 而要求其提高计算能力, 却不去剖析导致错误的真正原因, 这样实际上只是把这个问题的结论“灌输”给学生, 而问题并没有得到真正的解决. 如果让学生暴露其解题过程, 借此指出不等式变形应注意的等价转化, 因势利导, 对学生今后解决问题时进行正确思维活动无疑大有好处. 因此, 教师提问之后, 对学生的回答必须加以分析, 重视其反馈信息, 及时引导学生进行积极、正确的思维活动, 这样才能收到较好的教学效果.

3. 慎用廉价性的评价

对于学生的回答, 教师要慎用诸如“很好”、“非常好”、“不是, 不对”等习惯性的评价. 这样廉价的评价过于强化对与错, 天长日久, 学生的注意力会集中于教师想要的东西上. 我们可以适当地多使用一些中性、接纳性或者探究性的评价, 比如: “噢, 这是一种有道理的思路, 还有其他思路吗?”“这个想法不错, 我们还能补充点什么?”“很好的主意, 但是我们怎么知道……”有针对性地鼓励学生, 满足学生的需要, 鼓励学生继续学习. 有时, 恰当的批评也可能是一剂增强信心且有效的良药, “没有惩罚的教育是不完整的教育”, 关键是惩罚的时机、技巧和方法的恰当运用. 例如本节课中, 教师用“你做得太完美了!”对学生A进行评价, 有点廉价, 不利于学生A自我批评和更深层次的思考. 如果教师用“你的做法很好! 但是, 第一问中的某些步骤不够严谨, 你能发现吗?”或者请其他同学来对学生A的解题进行评价, 就会发现学生A没有写明为什么两边可以约去$\cos B$, 顺势可以帮不少学生解决斜三角形的概念, 就不会还有学生误将斜三角形理解为锐角三角形.

参考文献

[1] 弗兰肯海姆. 活跃课堂思维的教学策略[M]. 龙玫, 译. 北京: 中国轻工业出版社, 2011.

从一个容易题的高错误率引发的思考

314200 浙江平湖新华爱心高级中学 徐红星

数学符号可以用来表示数学的概念、运算、关系和推理, 使数学思维过程准确、概括、简明, 从而更容易揭示数学对象的本质[1]. 由于符号是概括的结果, 具有抽象性, 如果不注意理解, 就会在使用过程中出现写错、看错甚至不能理解等问题, 对于一个高中学生来说, 从某种程度上讲, 学习数学的过程就是学会用数学符号表述问题并解决问题的过程.

在今年浙江省12月的一次名校联考中, 一个有关二项式定理题的得分情况引起了笔者的注意: 填空题14: "在二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 的展开式中, 常数项大小为________", 得分率只有82%.

考后笔者和一些学生进行了分析, 得到的原因是: 将 "$\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{x}}$" 看成了 "$\frac{1}{2^3\cdot\sqrt{x}}$" (为了便于区别, 笔者在两个数之间添加了 "·" 以区分). 随后, 笔者在自己所任教的2个班里做了统计, "看错" 的比率分别为16%和15%, 也就是说, "看错" 是该题失分最主要的原因.

在随后的一次作业中, 相当一部分同学又将数列 $\left\{\frac{1}{a_{2^n}}\right\}$ "看成" 了 $\left\{\frac{1}{(a_2)^n}\right\}$, 笔者觉得这不仅用 "下次仔细看" 就可以解决的问题, 而是需要注意更多、更深层次的问题. 针对该问题, 笔者进行了如下几点思考.

1. "2^a" 表示什么意思?

对于 2^a, 这个看似简单的表示其实经历了太多的曲折, 凝结了多少数学家的智慧.

在我国, 公元前2世纪的《淮南子·天文训》对11个3相乘记作 "十一三之"; "乘方" 一词是宋代以后开始使用的, 一数自乘称之为 "方", 公元3世纪, 数学家刘徽使用了 "幂" 字表示指数的意义, 一直沿用到现在; 李冶(1192～1279)用 "天、上、高" 表示今天的 "x、x^2、x^3"; 13世纪元朝数学家朱世杰用 "极"、"恒河沙"、"无量数" 等佛经中的大数名称来表示10的正整数幂 10^{15}、10^{16}、10^{20}.

在国外, 3世纪的希腊数学人用 δ 表示 x, 用 δ^{ν} 表示 x^2; 代数始祖丢番图用 Δ^y 来表示 x^2, 用 κ^y 表示 x^3, 用他的这些表示, 现在的 "x^3+13x^2+5x" 表示为 $\kappa^y\alpha\Delta^y\upsilon\gamma\zeta\varepsilon$; 阿拉伯人哈基曾用 "mal" 表示 x^2, 用 "K$a^c b$" 表示 x^3; 到了15世纪, 法国数学家许凯(N. Chuquet, 1445～1500)在他的数学著作中用 12^3、10^5、120^8 分别表示 $12x^3$、$10x^5$、$120x^8$, 这是一种和现在的指数表示非常接近的方法, 但没有被广泛接受; 1546年德国数学家斯蒂菲尔(M. Stifle)创造了用1A、1AA、1AAA分别表示 x^1、x^2、x^3, 这是一种显著的改进, 但也没有得到同行的支持; 1585年, 荷兰数学家斯蒂文(S. Stevin)用 "$1^0+3^{①}+6^{②}+③$" 表示 "$1+3x+6x^2+x^3$".

1591年, 法国数学家韦达(F. Vieta)在《分析方法入门》用A表示现在的未知数 x, 用 "A quadratem" 表示 x^2, 用 "A cubun" 表示 "x^3", 后来的学者们进一步简化缩写文字, 用A、Aq、Ac表示 x、x^2、x^3.

1631年英国数学家哈里奥特(T. Harriot)在他死后10年出版的《实用分析术》改进了韦达的乘幂表示, 用 aa 表示 a^2, 用 aaa 表示 a^3 等; 3年后, 法国数学家厄里岗(P. Herigone)在他的《数学教程》里用 $a3$ 表示 a^3, "$2b4$" 表示 "$2b^4$", 这个符号与今天通用的符号只差一点点了. 有了这么多前辈的铺垫, 捅破窗户纸的好事降临法国数学家笛卡尔头上. 1637年, 笛卡尔受到厄里岗等人的启示, 扬弃二人之不足, 在他划时代的著作《几何学》中创用 a^3 表示 aaa, 用 a^4 表示 $aaaa$, 成

为数学符号史上正整数指数幂记号的创立者. 1801年, 德国数学家高斯在其《算术研究》一书中, 用b^2表示bb. 于是现在通用的指数写法正式产生, 发明符号的艰辛由此可见一斑[1].

是什么力量使得这些数学家不断地创造出这些符号呢? 这里涉及到数学的语言性特点. 数学的重要特点之一就在于它是通用、精确、简约的科学语言. 作为知识体系的科学, 必须要用语言表达. 最初是日常使用的生活语言; 后来, 为了精确和清晰, 使用符号语言、图形语言. 从这个角度看, 数学的发展史, 实际上也是数学符号的发展史, 指数符号的发展过程很好地说明了这一点. 在科学交往中, 常常需要用最少、最明确的语言传递信息, 数学语言简洁而明确是数学家不断发明指数记法的源源不竭的动力. 由多个相同数相加到乘法的产生, 多个相同数相乘到指数幂的产生这一个过程也成了数学发现与创造中的简洁美的最简单易懂的一个例子.

从指数符号的发展变化过程可以看出, 数学家为了明确而简洁地表示同一个量的多次幂, 发明了指数符号, 而在本题中, 如果学生要辨别“3”的角色, 应该想到2^3是一个确定的数, 显然写成8是一个更好的选择, 符合数学追求简洁的美学目标, 于是可推断“3”应该是根指数.

2. “$\sqrt[n]{x}$”表示什么, 它与“x^a”的表示有什么关系?

现行的负指数和分数指数, 到了17世纪才诞生. 它的首先创用人就是大名鼎鼎的牛顿, 在1676年6月13日转给莱布尼茨的一封信中率先使用的. 而简洁漂亮的符号“$\sqrt{\ }$”和指数符号的产生一样经历了很长的一个历史阶段.

最古老的平方根记号是古埃及的“|‾”; 中世纪, 印度人用kapaha一词的“ka”表示; 阿拉伯人有用$\overset{\equiv}{48}$表示$\sqrt{48}$的; 16世纪法国人用“L27adL12得L75”表示$\sqrt{27}+\sqrt{12}=\sqrt{75}$; 1624年英国人布里格斯分别用L, L3, LL表示平方根, 立方根和四次方根, 因为L是拉丁文Latus (正方形的边) 的首字母; 德国还有人用“•7”表示7的平方根, “• • 7”表示7的四次方根; 1525年德国数学家鲁达夫用“√”表示平方根, 用“√√”表示四次方根. 可见, 数学家一直以来都在寻求一种简洁、明了的表示方法.

欧拉认为平方根的符号来自“根”的英文radix的首字母r. 在意大利、法国和德国等国家曾用R5表示$\sqrt{5}$, 为了书写方便, 后来变成了“√5”. 到了1637年, 又是笛卡尔, 在被开方数上边添上了一条横线, 于是就成了现在的“$\sqrt{5}$”, 成了现在通用的平方根号. 这个小符号的创造发明蕴含着无数数学前辈的心血. 立方根的统一写法要稍晚一些.

我国使用根号$\sqrt{\ }$是由李善兰翻译西方数学书时引用的. 后来有人翻译出版《代数备旨》, 其中有这样一道习题 (如图1), 用来表示$\sqrt{16a^2x}+\sqrt{4a^2x}=?$孰好孰劣一眼可以看出来, 我们还可以从中看出中国数学为什么明朝之后就大大落后于西方, 原因就在于我国数学的符号科学没有能够与时俱进. 由此可见, 掌握一套好的符号表示, 对于提高学生的数学素养是多么的重要了.

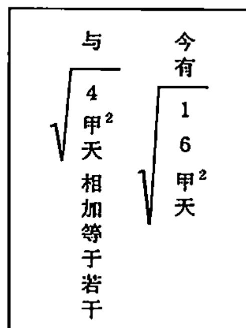


图1

根指数和分数指数是幂指数的两种表示, 它们满足$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, 分数指数的表示优势在于同底数幂的计算方式, 而根指数要进行运算, 必须要进行转化. 根据数学的美学追求, 在最后的结果中常常采用一种比较统一的方式, 比如, $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$是根指数的写法, 写成分数指数的话, 就是$\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}\right)^{10}$, 不会出现分数指数和根指数混排的情况. 同样的道理, 在表示角度的时候, 要么弧度制, 要么角度制, 混合表示一来混乱, 二来也不符合数学的求美精神.

3. 学生这样看有道理吗?

笔者特地用WORD的公式编辑器打出两种符号, $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$和$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2^3\sqrt{x}}\right)^{10}$, 有

由一道数学竞赛题的几种解法反思数学教学

200023　上海市黄浦区教育学院　徐庆惠

2012年上海市高中数学竞赛试题中的第9题是求函数解析式的问题, 考查了根据平行四边形以及三角形的边与角的关系, 利用余弦定理求解函数解析式的方法. 笔者结合学生的答题情况, 整理、归纳了几种不同的解法以及学生答题中的问题辨析, 供大家参考.

原题: 如图1, 在平行四边形$ABCD$中, $AB=x$, $BC=1$, 对角线AC与BD的夹角$\angle BOC=45^\circ$, 记直线AB与CD的距离为$h(x)$. 求$h(x)$的表达式, 并写出x的取值范围.

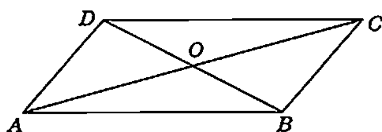


图1

解法1: (参考解答)

由平行四边形对角线平方和等于四条边的平方和得

$$OB^2+OC^2=\frac{1}{2}(AB^2+BC^2)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1).\cdots\cdots①$$

在$\triangle OBC$中, 由余弦定理得$BC^2=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cos\angle BOC$,

所以$OB^2+OC^2-\sqrt{2}OB\cdot OC=1.\cdots\cdots②$

由①、②得

$$OB\cdot OC=\frac{x^2-1}{2\sqrt{2}}.\cdots\cdots③$$

$$S_{ABCD}=4S_{\triangle OBC}$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\angle BOC$$

一些差别, 但不加以仔细分辨, 是很难注意的, 如果在排版时不小心压缩了, 就不存在差别了. 而本题的重点是考察学生对于二项式定理的掌握情况, 如果是因为看错导致失分, 本题的效度就大打折扣, 会变成一个"不好"的考题.

综合以上原因, 笔者认为学生这样看题是有道理的, 在有条件的前提下应当给予分数. 这个条件就是, 在试卷讲评的时候必须给学生上一课, 讲讲相关数学符号的发展历史, 讲讲数学的美学目标, 因为这也是数学教育的内容, 它更强调了数学的文化价值取向.

教学启示

1. 对学生归因于"看错"或"算错"的问题要认真对待.

对于某次考试之后的反思, "看错"或"算错"是学生最容易写下的理由. 但如果出现本篇讨论的问题之类的"错误", 简单认定学生"粗心", 也是有悖于数学教育目的的, 而应该认真反思, 找出原因, 提出解决方案.

2. 教师应当在教学中渗透数学符号等相关的文化背景知识, 让学生明白数学的简洁美所起的作用, 激发学习兴趣, 培养学生清晰明确的表达能力. 正确使用数学符号, 理性看待学习过程中出现的问题. 符合新课程标准提出"体现数学文化价值"的理念.

再回到原题, 一个容易题的错误分析, 让学生体会到了数学的"严谨", 如果和学生说说符号史, 然后和学生说"这样看也是有道理的", 反而激发学生的兴趣和信心, 对数学符号, 同时也是对数学又多了一层认识, 这不正是数学教育的目的吗?

参考文献

[1] 徐品方, 张红. 数学符号史[M]. 北京: 科学出版社, 2007年4月.

$=\sqrt{2}OB\cdot OC=\dfrac{x^2-1}{2}$,

故 $AB\cdot h(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$,

所以 $h(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$.

由③可得 $x^2-1>0$, 故 $x>1$.

因为 $OB^2+OC^2\geqslant 2OB\cdot OC$, 结合①、③可得 $\dfrac{1}{2}(x^2+1)\geqslant 2\cdot\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{2}}$,

解得(结合 $x>1$) $1<x\leqslant\sqrt{2}+1$.

综上所述, $h(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$, $1<x\leqslant\sqrt{2}+1$.

解法简析: 已知$\triangle OBC$内一边和一对角, 自然会想到用正弦定理或余弦定理. 另外, $\triangle OBC$又是在平行四边形中, 其两边恰为平行四边形对角线的一半, 因此要用到平行四边形四边平方和等于对角线的平方和. 再者, 要求的是平行四边形一边上的高和该边的函数关系式, 自然要用到两种不同求平行四边形面积的方法. 将上述三者联立就可求得所要的函数关系式. 对于定于域, 要通过上述的前两个关系式找到其中隐藏的基本不等式关系才能正确求解, 但部分学生只求出 $x>1$ 作为其定义域.

解法2: (解析法、参数法)

如图2, 以点A为原点, AB所在直线为x轴建立平面直角坐标系, 于是$B(x,0)$.

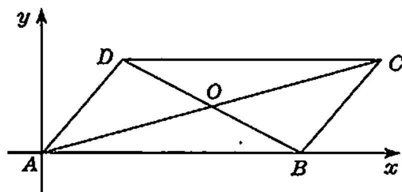


图2

设 $\angle DAB=\theta\,(0<\theta<\pi)$,

于是 $D(\cos\theta,\sin\theta)$, $C(\cos\theta+x,\sin\theta)$, $h(x)=\sin\theta$,

$\overrightarrow{AC}=(\cos\theta+x,\sin\theta)$, $\overrightarrow{BD}=(\cos\theta-x,\sin\theta)$.

一方面 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\cos^2\theta-x^2+\sin^2\theta=1-x^2$,

另一方面 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cos\dfrac{3\pi}{4}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\cos\theta+x)^2+\sin^2\theta}\cdot\sqrt{(\cos\theta-x)^2+\sin^2\theta}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+x^2+2x\cos\theta}\cdot\sqrt{1+x^2-2x\cos\theta}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2\cos^2\theta}$,

所以

$1-x^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2\cos^2\theta}$,

两边平方整理得

$\sin^2\theta=\dfrac{(x^2-1)^2}{4x^2}\,(x>1)$,

故 $h(x)=\sin\theta=\dfrac{x^2-1}{2x}\,(x>1)$.

又因为当 $0<\theta<\pi$ 时, $0<\sin\theta\leqslant 1$,

于是 $0<\dfrac{x^2-1}{2x}\leqslant 1$, 解得 $1<x\leqslant\sqrt{2}+1$.

综上所述, $h(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$, $1<x\leqslant\sqrt{2}+1$.

解法简析: 通过建立适当的平面直角坐标系, 将平行四边形置于其中, 就可以利用坐标法去解决问题, 这就是解析法. 再设平行四边形一个角为变量, 由此求出平行四边形四个顶点的坐标, 通过向量的数量积来确定函数关系式. 在这一解法中, 由于 $h(x)=\sin\theta$, 所以可以根据 $\sin\theta$ 的有界性来求 x 的取值范围, 这比解法1的方法更为显然.

在解法2中建立坐标系后还可以利用直线的到角公式来求解.

解法2′: 如解法2建立坐标系以及设定点的坐标.

设AC、BD所在直线的斜率分别为k_1、k_2, 且k_1、k_2均存在.

于是 $k_1=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+x}$, $k_2=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta-x}$.

根据到角公式, $\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$,

将k_1、k_2代入上式, 整理得

$1=\dfrac{-2x\sin\theta}{1-x^2}$,

故 $h(x)=\sin\theta=\dfrac{x^2-1}{2x}$.

定义域求解同解法2.

解法简析: 根据条件中的角, 除了联想到向量夹角之外, 还可以与直线夹角联系, 通过到角公式建立关系式, 也不失为一种好方法.

解法3: (几何法)

如图3，过点B作$BE\perp AC$，点E为垂足，过点C作$CF\perp AB$，点F为垂足，则$CF=h(x)$.

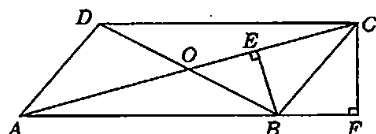


图3

设$BE=a$,

易得Rt$\triangle ABE$与Rt$\triangle ACF$相似，于是有$\frac{BE}{AB}=\frac{CF}{AC}$，即$\frac{a}{x}=\frac{h(x)}{AC}$，得$AC=\frac{x\cdot h(x)}{a}$,

$AO=OC=\frac{x\cdot h(x)}{2a}$.

又$\angle BOC=45°$，在等腰直角$\triangle OBE$中，$OE=BE=a$,

于是$AE=AO+OE=\frac{x\cdot h(x)}{2a}+a$,

$EC=OC-OE=\frac{x\cdot h(x)}{2a}-a$.

在Rt$\triangle ABE$与Rt$\triangle BEC$中，由勾股定理得$AB^2=BE^2+AE^2$, $BC^2=BE^2+EC^2$,

代入得$x^2=\left(\frac{x\cdot h(x)}{2a}+a\right)^2+a^2$, $1=\left(\frac{x\cdot h(x)}{2a}-a\right)^2+a^2$，展开后相减，可得

$h(x)=\frac{x^2-1}{2x}$.

如图4，作$\triangle OBC$的外接圆，由$BC=1$及$\angle BOC=45°$，可知点O在优弧BC上运动，此时平行线AB与CD之间的距离$h(x)$的取值范围为$0<h(x)\leqslant 1$(当且仅当平行四边形$ABCD$为矩形时$h(x)$取到最大值1)，于是可解得$1<x\leqslant\sqrt{2}+1$.

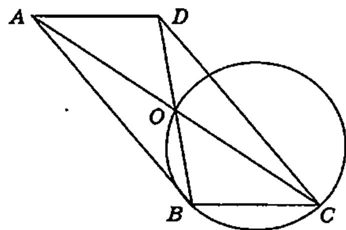


图4

解法简析：本解法中构造了相似的直角三角形，再利用勾股定理求解．在几何中融入代数运算，这是初中阶段学习的平面几何知识的再运用．但是这一解法要求出定义域是有难度的，学生在该解法中只求出了$x>1$，而没有能够完全求解正确，笔者给出了利用数形结合以及极限思想求解定义域的方法.

上述学生的几种解法，给我们教学带来的启示是：

在教学中要关注如何将一些常见的条件进行等价转化，通过不同的转化，可以用不同的方法去处理解决.

本题给出的条件是平行四边形对角线的夹角以及平行四边形的一边，而这两个条件恰好是在$\triangle OBC$内．根据这些条件最容易想到的就是余弦定理，这是学生较为熟悉的工具，但是在教学中除了讲授用正弦定理和余弦定理求解一些三角形问题外，还可以适当地增加类似于本题的平行四边形等问题，通过平行四边形的一些性质将边角联系在一起，拓展学生的思维.

本题解法2是利用坐标系、设角作为参数来求解．虽然本题中的自变量已经给定，但是设平行四边形的一个内角为变量，很快能确定平行四边形各个顶点的坐标，从而用解析法来求解，既体现出三角函数中的角为参变量方法的优越性，又体现了坐标法的简洁性.

目前新课改的教材中向量的地位比以前提高了，平面向量是沟通代数、几何和三角函数的一种工具，也通常是这三者的交汇点．因此，越来越多的学生会利用向量这一工具去解题，尤其是在建立坐标系后往往直接会想到用向量的方法去求解.

对于函数定义域的确定，在平时的教学中，学生遇到的都是能够简单、直观地求出．而求解本题的定义域时，需要从题中找到隐含的条件去求解，因此在教学中也可适当增加这一方面的相关问题，研究用不同的方法进行求解．如，笔者给出的解法3中定义域的求法，是根据同弧所对的圆周角相等，将45度角作为一长度为1的弦所对的圆周角，从动态角度分析两条平行线之间距离的取值范围，其中包含着极限思想．此外，若能结合函数单调性来说明，就更为严谨了.

总之，函数作为高中数学的主线，在讲解其他知识点的时候要时时不忘函数的思想与方法，将这些知识与函数知识有机地融合才能用多种方法去解决一些较为复杂的问题.

点燃思维火花 体验探究精彩

——一道解析几何试题的讲评过程

215008 江苏省苏州市第五中学 田 林

试卷讲评是高三数学复习课的重要形式，它除了帮助学生查漏补缺，完善知识结构外，还是有效提高学生分析问题、解决问题能力的主要途径. 在实际教学中，很多老师在试卷讲评，尤其是综合题讲评时大多就题讲题，学生被动接受标准答案或巧思妙解，也许当时能听懂方法，可时间一久遇到类似问题时多半还是无从下手. 那么，试卷讲评怎样才有效，学生的解题能力怎样才能提高呢？带着这样的困惑，笔者进行了一些尝试，现将自己的一些收获整理成文，供同行参考.

讲评试题　在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x-y+1=0$ 截以原点 O 为圆心的圆所得的弦长为 $\sqrt{6}$.

(1) 求圆 O 的方程；

(2) 若直线 l 与圆 O 切于第一象限，且与坐标轴交于点 D、E，当 DE 长最小时，求直线 l 的方程；

(3) 设 M、P 是圆 O 上任意两点，点 M 关于 x 轴的对称点为点 N，若直线 MP、NP 分别交 x 轴于点 $(m,0)$、$(n,0)$，问 mn 是否为定值？若是，请求出该定值；若不是，请说明理由.

一、讲评准备

该题主要考查直线与圆的方程、直线与圆的位置关系以及解析几何中的定值问题，对学生分析问题、代数运算能力的要求较高.

讲评前，笔者先对学生的答题情况做了统计和分析：该题满分为16分，班级平均分为10.7分，绝大多数学生能顺利解出前两道小题，三分之一左右的学生也可以正确完成第(3)小题. 主要方法为：

方法1：先设出点 M、P 坐标，写出直线 MP、NP 的方程后再分别求出 m、n，最后证明 mn 为定值.

个别学生采用了以下方法：

方法2：先设出点 M、P 坐标，再根据 MP 经过点 $(m,0)$ 及直线 NP 经过点 $(n,0)$ 分别求出 m、n，最后证明 mn 为定值.

两种方法并没有本质区别，只是方法2比方法1更简洁.

没有能解出第(3)小题的学生中，少部分是 m、n 求错了，其余则是因为缺少思路或计算繁琐而放弃了求解.

由以上分析可以看出，涉及代数运算的解析几何综合题仍然是学生的一个难点，尽管经过了前期的复习与训练，学生分析问题、计算求解的能力还需加强，所以试题讲评的重点是如何对条件进行加工、重组，通过改进方法来避免复杂的计算.

二、讲评过程

1. 尝试新问题

考虑到三分之一左右的学生已经解出原题，为进一步提高他们的参与度，上课时没有直接讲评原题，而是先给出一个与之相似的新问题.

问题1　已知 M、P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的任意两点，点 M 关于 x 轴的对称点为点 N，若直线 MP、NP 分别交 x 轴于点 $(m,0)$、$(n,0)$，求证：mn 为定值.

面对这样一道似曾相识的新问题，大部分学生都乐意一试身手. 会做的学生可以重温原题的解题过程、改进求解方法，而考试时思维受阻的学生也可以通过重新审题、分析来积累解题经验.

这道题的解决方法与原题如出一辙，只是计算略微复杂. 在学生尝试求解后，讲评的工作还是由他们完成：先选择几个学生来说解题思路，在对比、分析这些方法后，让学生体会如何对条件进行加工、重组，进而感悟问题的本质，领会如何才能避免复杂的计算.

2. *回看原问题*

解决了新问题，让学生再回头来看原问题，一切是那么自然与和谐：不论曲线是圆还是椭圆，都有$mn=\dfrac{x_2^2y_1^2-x_1^2y_2^2}{y_1^2-y_2^2}$，而点$M(x_1,y_1)$、$P(x_2,y_2)$在曲线上，只要将$x_1$、$x_2$用$y_1$、$y_2$表示后即可证得$mn$为定值.

看到同样的结论在圆和椭圆中都成立，学生的思维立刻被激活. 这时老师可以先引导学生思考原题中定值的几何意义以及这两个定值之间的联系，再让学生从解题方法、思维策略等方面进行反思，从而更好地领会思想方法、揭示问题本质.

3. *探究新结论*

在学生收获成功喜悦的时候，对试题的研究还可以继续深入. 老师引导学生思考：椭圆与双曲线有许多相似的性质，既然在椭圆中有上述结论，那么在双曲线、抛物线中也有相似的结论吗？思维的火花被点燃，学生们纷纷投入到新问题的探究之中. 尽管只是原先解法的再实施，但学生可以在巩固方法的同时再次感受解析几何的重要思想方法：坐标法和设而不求. 此时学生由一个"解题者"向"研究者"转变.

经过计算可以发现，双曲线具有相似的结论：

结论　已知M、P是双曲线$\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{b^2}{y^2}=1$上的任意两点，点$M$关于$x$轴的对称点为点$N$，若直线$MP$、$NP$分别交$x$轴于点$(m,0)$、$(n,0)$，则$mn=a^2$.

抛物线则没有相似的结论.

通过对比圆、椭圆和双曲线中的定值，学生不仅感受到数学的和谐、统一之美，更能体验到探究的精彩，激发学习的兴趣.

4. *生成新问题*

在学生认为试题讲评即将结束时，老师要留出时间，引导学生继续思考：这样的问题能否通过改变条件或结论生成新问题呢？接下来让学生进行小组讨论，利用上述解题方法与探究结论编制新问题. 这时试题讲评就由解题教学升华为问题研究，学生也由被动接受方法转变为享受解题过程.

一番尝试后让学生们进行成果展示，其余学生可以求解、点评. 师生一起收获不少有价值的问题：

问题2　过点$(2,0)$作直线l交圆$x^2+y^2=1$于M、P两点，若M关于x轴的对称点为点N，求证：直线NP经过定点.

问题3　过点$(m,0)$ $(m>a)$作直线l交椭圆$\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=1$于$M$、$P$两点，若$M$关于$x$轴的对称点为点$N$，求证：直线$NP$经过定点.

问题4　过点$(m,0)$ $(0<m<a)$作直线l交双曲线$\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{b^2}{y^2}=1$于$M$、$P$两点，若$M$关于$x$轴的对称点为点$N$，求证：直线$NP$经过定点.

问题5　过直线$x=m$ $(m>a)$上任意一点作直线l交椭圆$\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=1$于$M$、$P$两点，若$M$关于$x$轴的对称点为点$N$，求证：直线$NP$经过定点.

问题6　过直线$x=m(0<m<a)$上任意一点作直线l交双曲线$\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{b^2}{y^2}=1$于$M$、$P$两点，若$M$关于$x$轴的对称点为点$N$，求证：直线$NP$经过定点.

三、讲评反思

学生是教学过程的主体，更是试卷讲评的主角，所以试卷讲评时要充分调动他们的积极性，把蕴藏在他们身上的巨大潜能挖掘出来，决不能由老师一人包干、就题讲题. 讲评过程中老师可以先让学生说出解题思路，再引导他们去思考还有没有其他解法，进而在分析、比较各种解法后确定最优解法、抓住问题本质. 只有这样，学生的思维水平才能得到提升，分析、解决问题的能力也才能得到发展.

提高学生的解题能力和策略水平是试卷讲评的根本任务. 讲评过程中教师应强调通性通法，淡化一般性的演算，在揭示问题本质的

(下转封底)

一类圆锥曲线最值问题的通解探究

200240　上海市闵行第三中学　张宝贵

近几年的高考常考查这样一类问题: 求圆锥曲线上的动点 M 到一焦点 F 与一定点 A 的距离的最值. 这类问题也屡见于高中课本和教辅书, 呈现形式看似简练, 有时解答起来却极为棘手, 既要熟练掌握圆锥曲线的定义、性质, 还需灵活运用转化与化归、数形结合等思想方法, 对直觉思维能力的要求也较高.

除了上海高中课本, 各省市高中课本大多都介绍了圆锥曲线的统一定义, 上述问题常会讨论 $|MA|+\frac{1}{e}|MF|$ (e 是圆锥曲线的离心率) 的最值, 这样容易通过"化曲为直"来解决. 但是, 这里的系数条件似乎苛求, 并显得生硬, 学生也难以弄消系数的设置用意. 鉴于此, 笔者拟就求 $|MF|+|MA|$ 的最值情况, 找准问题的实质背景, 进行一些通解探讨, 梳理出便于应用的结论, 供读者解题参考.

结论 1: 已知点 F、F' 是长轴长为 $2a$ 的椭圆的两个焦点, 点 A 是一个定点, 点 M 是椭圆上的动点, 则

(1) 若点 A 在椭圆内, 则 $|MF|+|MA|$ 的最小值是 $2a-|AF'|$, 此时点 M 是椭圆与线段 $F'A$ 延长线的交点; $|MF|+|MA|$ 的最大值是 $2a+|AF'|$, 此时点 M 是椭圆与线段 AF' 延长线的交点.

(2) 若点 A 不在椭圆内, 则 $|MF|+|MA|$ 的最小值是 $|AF|$, 此时点 M 是椭圆与线段 AF 的交点; $|MF|+|MA|$ 的最大值是 $2a+|AF'|$, 此时点 M 是椭圆与线段 AF' 延长线的交点.

证明: (1) 如图 1(1), 点 A 在椭圆内.

由椭圆的定义, 得 $|MF|+|MA|=2a-|MF'|+|MA|=2a+(|MA|-|MF'|)$.

由三角形的性质, 得 $||MA|-|MF'||\leqslant|AF'|$, 即 $-|AF'|\leqslant|MA|-|MF'|\leqslant|AF'|$.

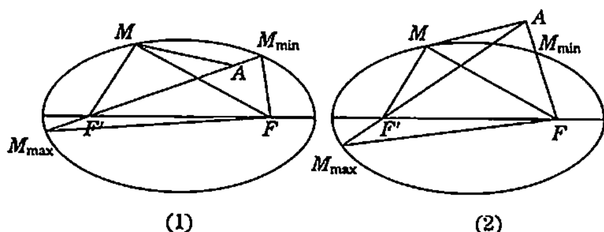


图 1

当点 M 是椭圆与线段 $F'A$ 延长线的交点时, $(|MA|-|MF'|)_{\min}=-|AF'|$, 所以 $(|MF|+|MA|)_{\min}=2a-|AF'|$; 当点 M 是椭圆与线段 AF' 延长线的交点时, $(|MA|-|MF'|)_{\max}=|AF'|$, 所以 $(|MF|+|MA|)_{\max}=2a+|AF'|$.

(2) 如图 1(2), 点 A 不在椭圆内.

显然, 当点 M 是椭圆与线段 AF 的交点时, $(|MF|+|MA|)_{\min}=|AF|$.

同 (1), 当点 M 是椭圆与线段 AF' 延长线的交点时, $(|MF|+|MA|)_{\max}=2a+|AF'|$.

例 1　已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点为 F, 点 $A(2,2)$ 在椭圆内, 点 M 是椭圆上的动点, 求 $|MF|+|MA|$ 的最小值与最大值.

解: 由椭圆的方程可知, 左焦点 $F'(-4,0)$, 长轴长 $2a=10$, 则

$|MF|+|MA|=10+(|MA|-|MF'|)$, $|AF'|=2\sqrt{10}$.

由三角形的性质, 得 $-|AF'|\leqslant|MA|-|MF'|\leqslant|AF'|$.

当点 M 是椭圆与线段 $F'A$ 延长线的交点时, $(|MF|+|MA|)_{\min}=10-2\sqrt{10}$; 当点 M 是椭圆与线段 AF' 延长线的交点时, $(|MF|+|MA|)_{\max}=10+2\sqrt{10}$.

结论 2: 已知点 F、F' 是实轴长为 $2a$ 的双曲线的两个焦点, 点 A 是一个定点, 点 M 是双曲线上的动点, 则

(1) 若点A在与焦点F对应的双曲线分支内, 则$|MF|+|MA|$的最小值是$|AF'|-2a$, 此时点M是该双曲线分支与线段AF'的交点, 但没有最大值. 当限定点M在双曲线的另一支上时, $|MF|+|MA|$的最小值是$|AF'|+2a$, 此时点M是双曲线的另一支与线段AF'的交点, 但没有最大值.

(2) 若点A不在与焦点F对应的双曲线分支内, 则$|MF|+|MA|$的最小值是$|AF|$, 此时点M是该双曲线分支与线段AF的交点, 但没有最大值. 当限定点M在双曲线的另一支上时, $|MF|+|MA|$的最小值是$|AF|$或$|AF'|+2a$, 此时点M是双曲线的另一支与线段AF或AF'的交点, 但没有最大值.

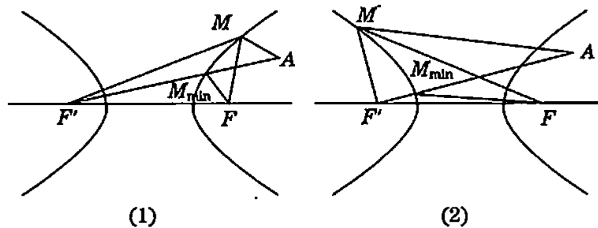


图2

证明: (1) 若点A在与焦点F对应的双曲线分支内, 讨论如下:

当点M在与焦点F对应的双曲线分支上时, 如图2(1), 由双曲线的定义, 得$|MF|+|MA|=|MF'|-2a+|MA|=(|MA|+|MF'|)-2a$.

由三角形的性质, 得$|MA|+|MF'|\geqslant|AF'|$.

当点M是该双曲线分支与线段AF'的交点时, $(|MA|+|MF'|)_{\min}=|AF'|$, 所以$(|MF|+|MA|)_{\min}=|AF'|-2a$.

当点M在双曲线的另一支上时, 如图2(2), 由双曲线的定义, 得$|MF|+|MA|=|MF'|+2a+|MA|=(|MA|+|MF'|)+2a$.

当点M是双曲线的另一支与线段AF'的交点时, $(|MA|+|MF'|)_{\min}=|AF'|$, 所以$(|MF|+|MA|)_{\min}=|AF'|+2a$.

显然, 无论点M在双曲线的哪个分支上, $|MF|+|MA|$都没有最大值.

综上可知, $|MF|+|MA|\in[|AF'|-2a,+\infty)$.

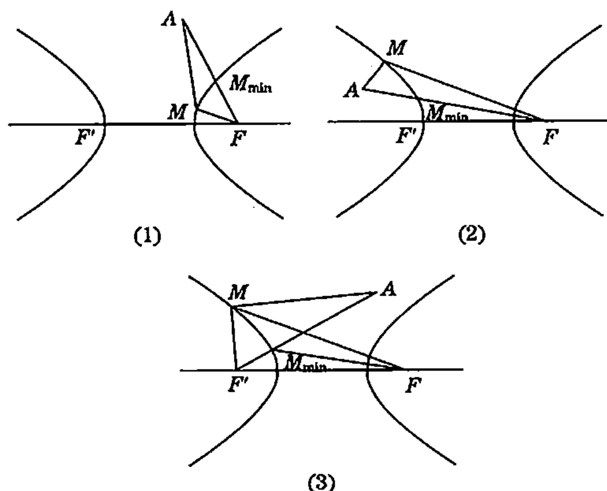


图3

(2) 若点A不在与焦点F对应的双曲线分支内, 讨论如下:

当点M在与焦点F对应的双曲线分支上时, 如图3(1), 容易看出, $(|MF|+|MA|)_{\min}=|AF|$, 此时点M是该双曲线分支与线段AF的交点.

当点M在双曲线的另一支上时, 若点A在与焦点F'对应的双曲线分支内, 如图3(2), 则$(|MF|+|MA|)_{\min}=|AF|$, 此时点M是双曲线的另一支与线段AF的交点; 若点A在双曲线上或位于两个分支之间, 如图3(3), 则$(|MF|+|MA|)_{\min}=(|MF'|+|MA|)_{\min}+2a=|AF'|+2a$, 此时点$M$是双曲线的另一支与线段$AF'$的交点, 并且$|AF'|+2a\geqslant|AF|$.

显然, 无论点M在双曲线的哪个分支上, $|MF|+|MA|$都没有最大值.

综上可知, $|MF|+|MA|\in[|AF|,+\infty)$.

例2 (2009年辽宁省高考理科试题)已知点F是双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$的左焦点, 点$A(1,4)$, 点$P$是双曲线右支上的动点, 则$|PA|+|PF|$的最小值为________.

解: 由双曲线的方程可知, 右焦点$F'(4,0)$, 实轴长$2a=4$, 则

$(|PA|+|PF|)_{\min}=(|PA|+|PF'|)_{\min}+4=|AF'|+4=5+4=9$.

例3 (2009年重庆市高考文科试题) 已知以原点O为中心的双曲线的一条准线方程为$x=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 离心率$e=\sqrt{5}$.

(1) 求该双曲线的方程;

(2) 若点A的坐标为$(-\sqrt{5},0)$, B是圆$x^2+(y-\sqrt{5})^2=1$上的点, 点M在双曲线右支上, 求$|MA|+|MB|$的最小值, 并求此时M点的坐标.

解: (1) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 记点$D(\sqrt{5},0)$, 则点A、D为双曲线的左、右焦点.

由双曲线的定义, 得$|MA|+|MB|=|MB|+|MD|+2\geqslant|BD|+2$.

因为点B是圆$x^2+(y-\sqrt{5})^2=1$上的点, 其圆心为$C(0,\sqrt{5})$, 半径为1, 所以$|BD|\geqslant|CD|-1=\sqrt{10}-1$, 从而$|MA|+|MB|\geqslant\sqrt{10}+1$.

综上可知, 当且仅当点M、B都在线段CD上时, 上述等号成立, $|MA|+|MB|$的最小值为$\sqrt{10}+1$.

此时, 直线CD的方程为$y=-x+\sqrt{5}$, 点M在双曲线右支上.

由$\begin{cases} y=-x+\sqrt{5}, \\ 4x^2-y^2=4, \end{cases}$ $(x>0)$

解得点$M\left(\frac{-\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{3}\right)$.

结论3: 已知抛物线的焦点F和准线l, 定点A到准线l的距离为d, 点M是抛物线上的动点, 则

(1) 若点A在抛物线内, 则$|MF|+|MA|$的最小值是d, 此时点M是抛物线与过点A垂直于准线l的直线的交点, 但没有最大值.

(2) 若点A不在抛物线内, 则$|MF|+|MA|$的最小值是$|AF|$, 此时点M是抛物线与线段AF的交点, 但没有最大值.

证明: (1) 如图4(1), 点A在抛物线内.

由抛物线的定义, 得$|MF|$等于点M到准线l的距离$|MM_1|$, 从而

$|MF|+|MA|=|MM_1|+|MA|\geqslant|AA_1|=d$.

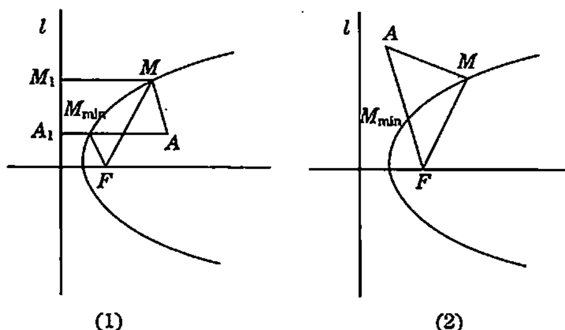


图4

当点M是抛物线与过点A垂直于准线l的直线AA_1的交点时, $|MF|+|MA|$的最小值是d; 显然, $|MF|+|MA|$没有最大值.

(2) 如图4(2), 点A不在抛物线内.

容易看出, 当点M是抛物线与线段AF的交点时, $|MF|+|MA|$的最小值是$|AF|$; 显然, $|MF|+|MA|$没有最大值.

例4 (2008年辽宁省高考理科试题)已知点P是抛物线$y^2=2x$上的一个动点, 则点P到点$(0,2)$的距离与点P到该抛物线准线的距离之和的最小值为 ················( )

(A) $\frac{\sqrt{17}}{2}$; (B) 3; (C) $\sqrt{5}$; (D) $\frac{9}{2}$.

解: 由已知, 抛物线的焦点为$F\left(\frac{1}{2},0\right)$, 点$A(0,2)$在抛物线的外部.又点$P$到准线的距离等于$|PF|$, $|PA|+|PF|\geqslant|AF|=\frac{\sqrt{17}}{2}$, 故答案为(A).

例5 (上海市高二课本第68页练习8)已知点A的坐标为$(3,2)$, 点F为抛物线$y^2=2x$的焦点, 若点P在抛物线上移动, 求$|PA|+|PF|$的最小值, 并求此时点P的坐标.

解: 依题意, 点A在抛物线内, 到准线$x=-\frac{1}{2}$的距离$|AA_1|=\frac{7}{2}$.

由抛物线的定义, 得$|PF|$等于点P到准线的距离$|PP_1|$, 从而

$|PA|+|PF|=|PA|+|PP_1|\geqslant|AA_1|=\frac{7}{2}$.

当点P是抛物线与直线$y=2$的交点$(2,2)$时, $(|PA|+|PF|)_{\min}=\frac{7}{2}$.

正方形的剪裁拼接问题

201713　上海市朱家角中学　洪文德

一、问题的背景

2002年全国高考文科试题第22题:

(I) 给出两块相同的正三角形纸片(如图1、图2), 要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型, 另一个剪拼成正三棱柱模型, 使它们的全面积都与原三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 分别用虚线标示在图1、图2中, 并做简要说明;

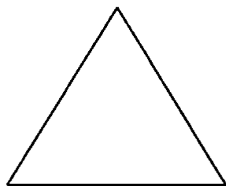


图1

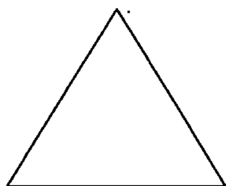


图2

(II) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;

(III) 如果给出的是一块任意三角形的纸片(如图3), 要求剪拼成一个直三棱柱模型, 使它的全面积与给出的三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 用虚线标示在图3中, 并作简要说明.

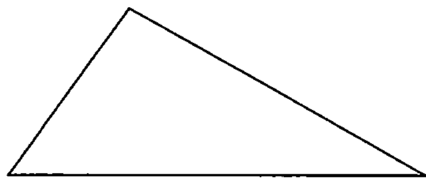


图3

该题主要是考查学生的空间想象能力、动手操作能力、探究能力和灵活运用所学知识解决现实问题的能力.

正三角形、矩形、正方形等是常见的具有特殊性质的几何图形, 有关这类特殊几何图形的剪裁、拼接、翻折等问题, 在一些教辅书、竞赛题及近几年的中、高考题中经常出现. 这类问题在选题素材、语言设计、解题方法等方面都有其鲜明的特点, 是培养学生数学思维的好素材、好题目. 数学"应用问题"应源于实际, 其所用到的数学基础知识应符合教学大纲的要求, 是学生经过努力能够解决的一种问题. 由于这样的问题比较贴近学生的生活, 融科学性、思想性、典型性、趣味性于一体, 因此能提高学生学习数学的兴趣, 促进他们形成科学解题的思想方法. 因此, 由该高考试题出发, 我们提出下面所需研究的问题.

二、问题的引出

问题: 如图4, 甲、乙是边长为$4a$的两张正方形纸片, 现将甲剪拼成一个正四棱柱(有盖的), 将乙剪裁拼接成一个正四棱锥, 使它们的全面积都等于原正方形的面积.

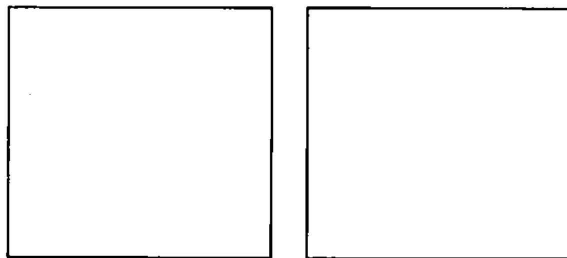


图4

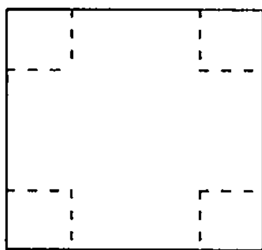
将剪裁方法用虚线标示在图中, 并作简要说明.

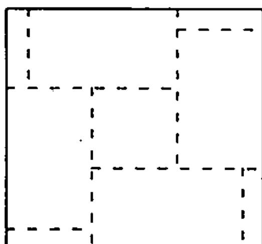
三、问题的解决

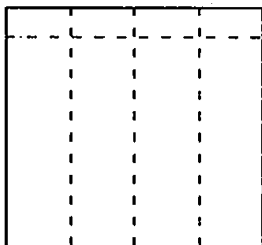
(一) 正四棱柱的剪裁拼接

1. 几种剪裁拼接正四棱柱的方法

图5是以$2a$为底面边长，a为高的正四棱柱，易算出$V_5 = 4a^2 \cdot a = 4a^3$；图6是以$\frac{4}{3}a$为底面边长，$\frac{7}{3}a$为高的正四棱柱，易得$V_6 = \frac{16a^2}{9} \cdot \frac{7a}{3} = \frac{112}{27}a^3$；图7是以$a$为底面边长，$\frac{7}{2}a$为高的正四棱柱，$V_7 = a^2 \cdot \frac{7a}{2} = \frac{7}{2}a^3$. 由此可以知道，不同的剪裁方法所得的正四棱柱，其体积是不同的，自然地，我们提出这样的问题：通过剪拼而得的正四棱柱，其体积是否存在最大值？若有最大值，那么是否存在某种剪裁方法，使所得的正四棱柱的体积恰好为此最值？


图5


图6


图7

2. 正四棱柱体积的最值

设正四棱柱底面边长为x，高为y，则满足$16a^2 = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + 2xy + 2xy \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{2x^2 \cdot 2xy \cdot 2xy} = 6 \cdot \sqrt[3]{x^4y^2}$，当且仅当$2x^2 = 2xy$时，即$x = y = \frac{2}{3}\sqrt{6}a$时，等号成立，故当$x = y = \frac{2}{3}\sqrt{6}a$时，$V_{\max} = \frac{16\sqrt{6}}{9}a^3$，即拼接成正方体时体积最大.

3. 体积最大的正四棱柱的剪拼

既然正四棱柱的体积有最大值，那么经过怎样的剪裁，可以使所拼接成的正四棱柱的体积最大呢？

(1) 由前面讨论知，将$16a^2$的正方形纸张制作成一个边长为$\frac{2}{3}\sqrt{6}a$的正四棱柱是体积最大的. 可考虑从正方形的纸张上剪裁出边长为$\frac{2}{3}\sqrt{6}a$的小正方形作为正四棱柱的上下底面，联想到$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

首先，如图8，其中$\angle BAD = 30°$, $\angle BCD = 45°$，由于$AD = 4a$，则得$BD = \frac{4}{3}\sqrt{3}a$, $BC = \frac{4}{3}\sqrt{6}a$，$E$为$BC$的中点，故$EC = \frac{2}{3}\sqrt{6}a$.

然后，取EC的长度构造四个全等的小正方形，如图9，线段EF将剩余部分等分为两个全等的直角梯形，分别记作梯形$ABEF$、梯形$CDEF$，其中$AB = CD = \left(4 - \frac{4}{3}\sqrt{6}\right)a$, $BE = DE = \frac{4}{3}\sqrt{6}a$, $AF = CF = 4a$. 下面的问题是：这两个梯形是否可以通过有限次的剪裁，使得可以拼接为两个以$\frac{2}{3}\sqrt{6}a$为边长的正方形？

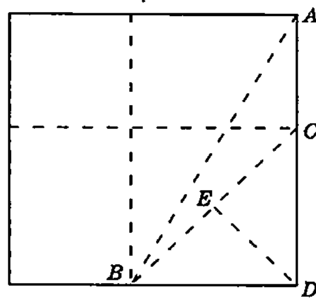


图8

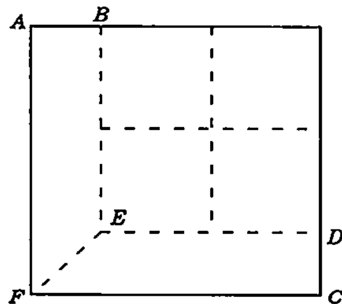


图9

接着再将两个梯形$ABEF$、$CDEF$如图10所示拼接成矩形$ABCD$, 则$BC=\left(4+\frac{4}{3}\sqrt{6}\right)a$, $AB=\left(4-\frac{4}{3}\sqrt{6}\right)a$, 作中位线$MN$, 下面需要求证: (如图11)

长为$\left(2+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)a$, 宽为$\left(4-\frac{4}{3}\sqrt{6}\right)a$的矩形$ABMN$能否经过有限次的剪裁, 使得可以拼接成边长为$\frac{2}{3}\sqrt{6}a$的正方形?

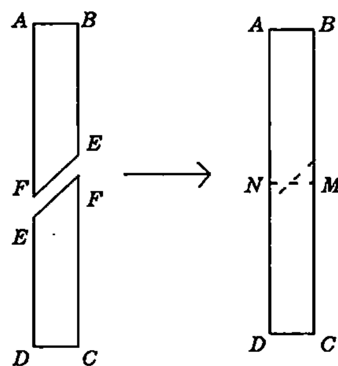


图10

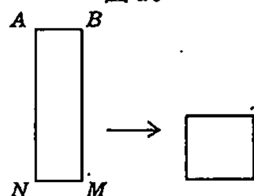


图11

因为$\left(2+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)a$: $\frac{2}{3}\sqrt{6}a\notin Q^{+}$, 所以不可能将该矩形$ABMN$通过有限次剪裁而拼接成满足条件的正方形, 故边长为$4a$的正方形不可能通过剪裁而拼接成体积为$\frac{16\sqrt{6}}{9}a^3$的正四棱柱.

既然实际中无法拼接出理论上的体积最大的正四棱柱, 那么如何剪拼可以使得所得正四棱柱的体积接近理论最值呢?

(2) 通过分析图5、图6、图7的剪裁方法, 发现它们有个共同之处是: 将原正方形的边长等分, 所得正四棱柱的底面边长分别是原正方形边长的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$, 如果底面边长是原正方形边长的$\frac{1}{n}$时, 是不是也可以裁剪拼接成正四棱柱?

设正棱柱的底面边长为x, 高为y. 因为$2x^2+4xy=(4a)^2$, 得$y=\frac{8a^2x^2}{2x}$, 所以$0<x\leqslant 2\sqrt{2}a$.

将原正方形边长4等分, 则所有得到的正四棱柱的底、高的长度及体积数见表1:

表1

底面边长x	a	$2a$
高y	$\frac{7}{2}a$	a
体积V	$\frac{7}{2}a^3$	$4a^3$

将原正方形边长5等分, 则得到的所有正四棱柱的底、高的长度及体积数见表2:

表2

底面边长x	$\frac{4}{5}a$	$\frac{8}{5}a$	$\frac{12}{5}a$
高y	$\frac{23}{5}a$	$\frac{17}{10}a$	$\frac{7}{15}a$
体积V	$\frac{368}{125}a^3$	$\frac{544}{125}a^3$	$\frac{336}{125}a^3$

将原正方形边长6等分, 则所有得到的正四棱柱的底、高的长度及体积数见表3:

表3

底面边长x	$\frac{2}{3}a$	$\frac{4}{3}a$	$2a$	$\frac{8}{3}a$
高y	$\frac{17}{3}a$	$\frac{7}{3}a$	a	$\frac{1}{6}a$
体积V	$\frac{68}{27}a^3$	$\frac{112}{27}a^3$	$4a^3$	$\frac{32}{27}a^3$

一般地, 将边长为$4a$的正方形边长n等分后, 则得到的所有正四棱柱的底$x=\frac{4k}{n}a$、高$y=\frac{n^2-2k^2}{kn}a$及体积$V=\frac{16k^2(n^2-2k^2)}{n^3}a^3$, 其中$k\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}n, k\in\mathbf{N}^*$.

对于这种剪裁方法, 笔者编了一个MATLAB程序进行验证: 当任意输入a、n的值时, 我们将得到一个矩阵列表, 见表4, 其中第一列表示将原正方形边长进行几等分, 第二列表示此时体积的最大值, 第三列表示与理论体积最大值之间的误差, 例如: 当$a=1$, $n=30$时, 从表中可见, 将原正方形边长22等分或27等分时$\left(\text{分别取底边长为}\frac{18a}{11}\text{或}\frac{44a}{27}\right)$, 可构造出正四棱柱, 使其体积与边长为$\frac{2}{3}\sqrt{6}$的正方体体积非常接近.

表4

V=		
0	0	0
0	0	0
0	0	0
4.0000	4.0000	0.3546
5.0000	4.3520	0.0026
6.0000	4.1481	0.2065
7.0000	4.3382	0.0165
8.0000	4.3125	0.0421
9.0000	4.3018	0.0529
10.0000	4.3520	0.0026
11.0000	4.2795	0.0752
12.0000	4.3519	0.0028
13.0000	4.3332	0.0215
14.0000	4.3382	0.0165
15.0000	4.3520	0.0026
16.0000	4.3203	0.0343
17.0000	4.3542	0.0005
18.0000	4.3402	0.0145
19.0000	4.3482	0.0065
20.0000	4.3520	0.0026
21.0000	4.3382	0.0165
22.0000	4.3546	0.0000
23.0000	4.3436	0.0111
24.0000	4.3519	0.0028
25.0000	4.3520	0.0026
26.0000	4.3459	0.0087
27.0000	4.3546	0.0000
28.0000	4.3455	0.0092
29.0000	4.3534	0.0012
30.0000	4.3520	0.0026
>>		

(二) 正四棱锥的剪拼

1. 几种可以剪拼成正四棱锥的方法

如图12, 若以正方形各边中点连结而成的小正方形边为裁剪线, 能否拼接成正四棱锥? 答案是不能. 因为沿裁剪线翻折后, 原正方形各顶点重合于一点, 这点即为原正方形的中心, 就不存在四棱锥了.

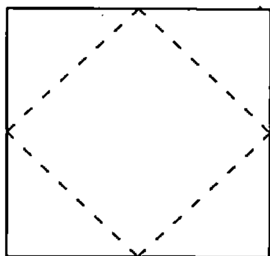


图12

图13是以2a为底面边长, 高为$2\sqrt{2}a$的正四棱锥, 则$V_{13}=\frac{1}{3}\cdot 4a^2\cdot 2\sqrt{2}a=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

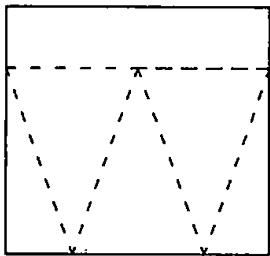


图13

图14, 联想到勾股定理的证明, 可设直角三角形的两条直角边长分别为x, $y(y>x)$, 于是$\begin{cases}x+y=4a,\\ y-x=2x\end{cases}$, 所以$\begin{cases}x=a,\\ y=3a\end{cases}$, 则构造成以$2a$为底面边长, 高为$2\sqrt{2}a$的正四棱锥, $V_{14}=V_{13}=\frac{1}{3}\cdot 4a^2\cdot 2\sqrt{2}a=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

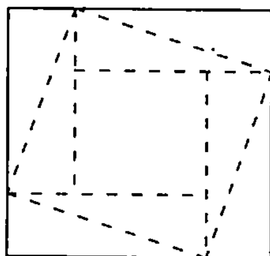


图14

图13、图14的正四棱锥的底面边长是原正方形边长的$\frac{1}{2}$, 那么如何剪裁使正四棱锥的底面边长是原正方形边长的$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$呢?

探讨: 如图15, 将边AD三等分, 分点为点V、W; 将边BC三等分, 分点为点Y、Z. 取线段AV的中点U. 将线段VY三等分, 分点为点E、G; 将线段WZ三等分, 分点为点F、H. 再将线段BY分成三段, 使$BP:PQ:QY=1:6:1$; 将EF分成三段, 使得$EM:MN:NF=1:6:1$.

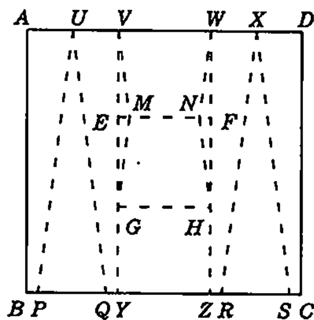
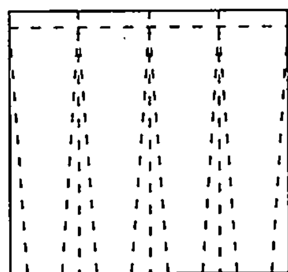


图15

若将正方形$EFHG$平移到矩形$ABYV$下方, 使EF和BY重合, 则MN和PQ重合. 这时可以使得一个等腰三角形为正四棱锥的一个侧面, 再以小正方形$GYZH$作为底面, 便可拼成一个正四棱锥. 因为斜高是$\frac{16}{3}a$, 故其高为$2\sqrt{7}a$, 由此得正四棱锥的体积为$V_{15}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4a}{3}\right)^2\cdot 2\sqrt{7}a=\frac{32\sqrt{7}}{27}a^3$.

如图16, 沿正方形一边裁去4个全等的$a\times\frac{a}{4}$长方形, 剩下4个全等的$a\times\frac{15a}{4}$长方形, 且沿一边按$\frac{a}{4}:\frac{a}{2}:\frac{a}{4}$取点, 则拼成的正四棱锥底面边长为$a$, 斜高为$2\times\frac{15}{4}a=\frac{15}{2}a$, 高为$2\sqrt{14}a$, $V_{16}=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot 2\sqrt{14}a=\frac{2\sqrt{14}}{3}a^3$.

2. 正四棱锥体积的最值


图16

同样地, 我们发现不同的剪拼方法所得到的正四棱锥体积是不同的, 故也来研究一下正四棱锥体积的最值的情况.

设正四棱柱的底面边长为x, 斜高为h, 则满足$x^2+4\cdot\frac{1}{2}xh=16a^2$, 所以$h=\frac{16a^2-x^2}{2x}$, 故正四棱锥的高为$\sqrt{h^2-\frac{x^2}{4}}$, $V=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt{h^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{2\sqrt{2}a}{3}\sqrt{x^2(8a^2-x^2)}$, 其中$x\in(0,2\sqrt{2}a)$. 因为$\sqrt{x^2(8a^2-x^2)}\leqslant\frac{x^2+8a^2-x^2}{2}=4a^2$, 当且仅当$x^2=8a^2-x^2$, 即$x=2a$时, 等号成立. 所以, 当$x=2a$时, $V_{\max}=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

故图13、图14的剪裁方法已使正四棱锥的体积达到最大值.

3. 底面边长为$\frac{1}{n}$的正四棱锥的剪拼方法

类比正四棱柱的研究方法, 同样地来研究一下正四棱锥, 若使所得的正四棱锥的底面边长是原正方形边长的$\frac{1}{n}$, 该如何来剪拼呢?

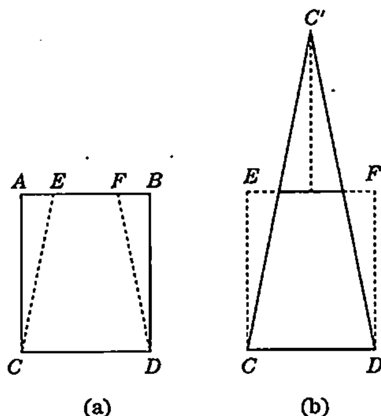


图17

(1) 首先证明: 任何一个长方形都可以通过剪裁、拼接成一个以原宽为底, 高为长方形长2倍的三角形.

证明: 取$AE=FB=\frac{1}{4}AB$, 连结CE、DF, 则$\triangle ACE$, $\triangle BDF$可拼接成$\triangle EC'F$, 所以长方形$ABCD$拼接为$\triangle CC'D$, 其高为$2AC$.

(2) 当原正方形被剪去一个边长$\frac{a}{n}$的小正方形后, 剩下的必可以被剪裁成四个宽为$\frac{a}{n}$, 长为$\frac{16n^2-1}{4n}a$的全等的长方形, 由上面的证明可知每个长方形都可以拼接为一个以$\frac{a}{n}$为底, $\frac{16n^2-1}{2n}a$为高的三角形, 用该三角形作正四棱锥的侧面, 边长$\frac{a}{n}$的小正方形作正四棱锥的底面, 从而拼接成我们所需的正四棱锥.

综上所述, 可得到这样的结论: 任意一个正方形均可通过将其边长二等分后, 剪拼成体积达到最大值的正四棱锥.

四、结论与总结

1. 边长为$4a(a\in\mathbf{Q}^+)$的正方形, 不能经有限次剪拼成为表面积为$16a^2$, 体积为$\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$的正四棱柱, 但将其边长n等分, 当n固定时有唯一的k值使其体积最接近理论最大值(可由程序较容易地得到结论).

2. 任一个边长为$a(a\in\mathbf{Q}^+)$的正方形均可通过将其边长二等分被剪拼成体积达到最大值的正四棱锥.

3. 若是将正方形剪拼为无盖的正四棱柱, 那么我们可以用类似的方法来讨论研究, 至于具体过程及结论在这里就不再赘述了.

参考文献

[1] 汪洁萍. 解读新课标的基本概念之一—发展学生的数学应用意识. 上海中学数学[J]. 2003 (19): 3-7.

[2] 孙琪斌. 中考趣味数学拼图解法举例. 上海中学数学[J]. 2006 (4): 43-48.

[3] 许光军. 例说几何图形的分割与拼接. 数学通讯[J]. 2003 (13): 23-25.

[4] 张贵钦. 对一个无盖正四棱柱水箱设计的研讨. 数学教学[J]. 2006 (1): 12-15.

[5] 楼可飞, 陈默. 正方形的翻折问题. 数学教学[J]. 2003 (10): 11-13.

(下转第9-34页)

对直线与有心圆锥曲线位置关系判定的探究

102200 北京市昌平区第一中学 何 苗 张全合

在高中解析几何的学习中, 我们知道判断直线与有心圆锥曲线位置关系的方法是判别式法 (代数法), 即把直线方程与有心圆锥曲线的方程联立, 消去 y (或 x), 得到一个关于 x (或 y) 的一元二次方程, 再计算判别式 $\triangle$. 这样做会遇到一个运算复杂的问题, 能否加以改进, 使判定方法变得简单呢? 我们先来重温判定直线 l: $Ax+By+C=0\,(B\neq 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 位置关系的判别式法.

把 $y=-\frac{Ax+C}{B}$ 代入椭圆方程中, 消去 y 得 $(a^2A^2+b^2B^2)x^2+2a^2ACx+a^2(C^2-b^2B^2)=0$,

则 $\triangle=4a^4A^2C^2-4a^2(a^2A^2+b^2B^2)(C^2-b^2B^2)=4a^2b^2B^2(a^2A^2+b^2B^2-C^2)$.

(1) 直线 l 与椭圆相切

$\Longleftrightarrow a^2A^2+b^2B^2-C^2=0$

$\Longleftrightarrow b^2=\frac{aA-C}{B}\cdot\frac{-aA-C}{B}$.

直线 $x=-a$ 与直线 l 交点的纵坐标为 $y_1=\frac{aA-C}{B}$, 直线 $x=a$ 与直线 l 交点的纵坐标为 $y_2=\frac{-aA-C}{B}$, 所以直线 l 与椭圆相切 $\Longleftrightarrow y_1y_2=b^2$;

(2) 直线 l 与椭圆相交

$\Longleftrightarrow a^2A^2+b^2B^2-C^2>0$

$\Longleftrightarrow b^2>\frac{aA-C}{B}\cdot\frac{-aA-C}{B}$

$\Longleftrightarrow y_1y_2<b^2$;

(3) 直线 l 与椭圆相离

$\Longleftrightarrow a^2A^2+b^2B^2-C^2<0$

$\Longleftrightarrow b^2<\frac{aA-C}{B}\cdot\frac{-aA-C}{B}$

$\Longleftrightarrow y_1y_2>b^2$.

结论1 已知直线 l: $Ax+By+C=0$ $(B\neq 0)$, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 直线 $x=-a$, $x=a$ 与直线 l 交点的纵坐标分别为 y_1、y_2.

(1) 直线 l 与椭圆相切 $\Longleftrightarrow y_1y_2=b^2$;

(2) 直线 l 与椭圆相交 $\Longleftrightarrow y_1y_2<b^2$;

(3) 直线 l 与椭圆相离 $\Longleftrightarrow y_1y_2>b^2$.

类比到双曲线中, 以 $-b^2$ 代 b^2 有下面的结论:

结论2 已知直线 l: $Ax+By+C=0$ $(B\neq 0)$, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$, 且直线 l 不是双曲线的渐进线. 直线 $x=-a$, $x=a$ 与直线 l 交点的纵坐标分别为 y_1、y_2.

(1) 直线 l 与双曲线相切 $\Longleftrightarrow y_1y_2=-b^2$;

(2) 直线 l 与双曲线相交 $\Longleftrightarrow y_1y_2>-b^2$;

(3) 直线 l 与双曲线相离 $\Longleftrightarrow y_1y_2<-b^2$.

我们知道, 判断直线与圆的位置关系有两种方法: 一种是判别式法 (代数法); 另一种是几何法, 即利用圆心到直线的距离 d 与 r 的大小关系来判断.

显然, 后者比前者的运算简单, 备受人们的喜爱和使用. 那么能否用几何法来判断直线与椭圆的位置关系呢?

联想到圆与椭圆之间的特殊关系: 圆是椭圆的两个焦点无限接近时的极限状态, 所以可以做一下尝试, 这需要考虑椭圆的两个焦点到直线的距离 d_1 与 d_2. 为此, 我们先举一个具体的例子, 探究方法, 先考虑直线与椭圆相切的情况, 然后把直线方程作适当的平移变式, 再看相交与相离的情况.

例1 设 F_1、F_2 是椭圆 C: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点, 点 F_1、F_2 到直线 $l_1: x-y+\sqrt{34}=0$ 的距离分别为 d_1、d_2.

(1) 判断直线 l_1 与椭圆 C 的位置关系;

(2) 求 d_1、d_2 的值, 观察寻找 d_1、d_2 的值与椭圆 C 中基本量的关系.

解: (1) 由方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\ x-y+\sqrt{34}=0\end{cases}$ 消去 y 可得 $34x^2+50\sqrt{34}x+625=0$.

$\Delta=(50\sqrt{34})^2-4\times34\times625=0$, 说明直线 l_1 与椭圆 C 相切.

(2) 椭圆 C 的两个焦点为 $F_1(-4,0)$、$F_2(4,0)$, 点 F_1 到直线 l_1 的距离 $d_1=\dfrac{-4+\sqrt{34}}{\sqrt{2}}$, 点 F_2 到直线 l_1 的距离 $d_2=\dfrac{4+\sqrt{34}}{\sqrt{2}}$.

仔细观察, 发现 $d_1\cdot d_2=9=b^2$,

所以我们猜想: 当 $d_1\cdot d_2=b^2$ 时, 直线 l_1 与椭圆 C 相切.

说明: 为什么要考虑 $d_1\cdot d_2$ 呢? 应用类比的思想, 直线与圆相切时 $d=r$, $d^2=r^2$, 因此椭圆中要考虑 $d_1\cdot d_2=b^2$ (注意当点 F_1、F_2 趋近于重合时, $b\longrightarrow r$).

这时我们想到: ①把直线 l_1 中的 $\sqrt{34}$ 变小, 如变为2, 得到与椭圆 C 相交的直线 l_2; ②把直线 l_1 中的 $\sqrt{34}$ 变大, 如变为6, 得到与椭圆 C 相离的直线 l_3, 此时相应的 $d_1\cdot d_2$ 会怎样呢?

①当直线 l_2 方程为 $x-y+2=0$ 时, $d_1=\sqrt{2}$, $d_2=3\sqrt{2}$, 所以 $d_1\cdot d_2=6<9=b^2$;

②当直线 l_3 方程为 $x-y+6=0$ 时, $d_1=\sqrt{2}$, $d_2=5\sqrt{2}$, 所以 $d_1\cdot d_2=10>9=b^2$.

猜想: 当 $d_1\cdot d_2<b^2$ 时, 直线 l_2 与椭圆 C 相交; 当 $d_1\cdot d_2>b^2$ 时, 直线 l_3 与椭圆 C 相离.

结论3 设 F_1、F_2 是椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的两个焦点, 点 F_1、F_2 到直线 l: $Ax+By+C=0$ (A、B 不同时为0) 的距离分别为 d_1、d_2, 且点 F_1、F_2 在直线 l 的同侧, 那么直线 l 与椭圆 E 相切的充要条件是 $d_1\cdot d_2=b^2$; 直线 l 与椭圆 E 相交的充要条件是 $d_1\cdot d_2<b^2$; 直线 l 与椭圆 E 相离的充要条件是 $d_1\cdot d_2>b^2$.

下面仅就相切的情况加以证明:

由方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ Ax+By+C=0\end{cases}$ 消去 y 可得 $(a^2A^2+b^2B^2)x^2+2a^2ACx+a^2(C^2-b^2B^2)=0$.

因为直线 l 与椭圆 E 相切 (此时椭圆的两个焦点在直线的同侧), 所以 $\Delta=(2a^2AC)^2-4(a^2A^2+b^2B^2)\times a^2(C^2-b^2B^2)$
$=4a^2b^2B^2(a^2A^2+b^2B^2-C^2)=0,\cdots\cdots\cdots(*)$

所以 $C^2=a^2A^2+b^2B^2$.

又因为椭圆 E 的焦点 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$, 其中 $c^2=a^2-b^2$, 所以

$$d_1\cdot d_2=\frac{|-Ac+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\frac{|Ac+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C^2-A^2c^2|}{A^2+B^2}=\frac{|a^2A^2+b^2B^2-A^2c^2|}{A^2+B^2}=b^2,$$

所以直线 l 与椭圆 E 相切 $\Longrightarrow d_1\cdot d_2=b^2$.

反之, 若 $d_1\cdot d_2=b^2$, 则 $\dfrac{|-Ac+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\dfrac{|Ac+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=b^2$, 即

$$|C^2-A^2c^2|=b^2(A^2+B^2).\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

因为点 F_1、F_2 在直线 l 的同侧, 将其坐标分别代入到直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$ 的左边, 有 $-Ac+C$ 与 $Ac+C$ 的符号相同, 从而 $C^2-A^2c^2>0$.

由①得 $C^2=A^2c^2+b^2(A^2+B^2)=a^2A^2+b^2B^2$, 即 $a^2A^2+b^2B^2-C^2=0$.

所以 $\Delta=4a^2b^2B^2(a^2A^2+b^2B^2-C^2)=0$,

故直线 l 与椭圆 E 相切.

那么我们能否用几何法来判断直线与双曲线的位置关系呢? 回答是可行的, 其结论是:

结论4 当直线 l 与双曲线的渐近线平行 (不重合) 时, 显然, 直线 l 与双曲线的一支必定相交, 有且仅有一个交点; 当直线 l 与双曲线的渐近线重合时, 没有交点.

结论5 当双曲线的两个焦点在直线 l 的同侧, 且直线 l 与双曲线的渐近线不平行也不重合时, 直线 l 与双曲线必定相交, 有且仅有两个交点.

结论6 当双曲线的两个焦点在直线 l 的异侧, 且直线 l 与双曲线的渐近线不平行也不重合时:

①直线 l 与双曲线相切的充要条件是 $d_1\cdot d_2=b^2$;

②直线 l 与双曲线相交的充要条件是 $d_1\cdot d_2<b^2$;

③直线 l 与双曲线相离的充要条件是 $d_1\cdot d_2>b^2$.

一类关于 n 次幂不等式证明的方法探究

334113 江西上饶董团中学 吕辉旺

在证明与 n 次幂有关的不等式时, 由于 n 次幂的处理很麻烦, 用一般的方法往往存在很大的困难. 若对不等式自身结构进行深入地分析, 根据已知不等式的结构特征, 构造一些与它有内在联系的式子 (或利用自身特点), 利用式子之间的运算作为桥梁, 可以促使问题转化和解决. 用这种方法证明不等式, 思路独特, 事半功倍. 现举例说明如下.

例 1 已知曲线 $C_n: x^2-2nx+y^2=0$ $(n=1,2,\cdots)$, 从点 $P(-1,0)$ 向曲线 C_n 引切线 l_n, 斜率为 $k_n(k_n>0)$, 切点为 $P_n(x_n,y_n)$. 证明: $x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}$.

证明: 设直线 l_n:$y=k_n(x+1)$, 与 $x^2-2nx+y^2=0$ 联立得 $(1+k_n^2)x^2+(2k_n^2-2n)x+k_n^2=0$, 则 $\Delta=(2k_n^2-2n)^2-4(1+k_n^2)k_n^2=0$, 故 $k_n=\dfrac{n}{\sqrt{2n+1}}\left(-\dfrac{n}{\sqrt{2n+1}}\text{舍去}\right)$.

$\therefore x_n^2=\dfrac{k_n^2}{1+k_n^2}=\dfrac{n^2}{(n+1)^2}$, 即 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$, $\therefore y_n=k_n(x_n+1)=\dfrac{n\sqrt{2n+1}}{n+1}$.

$\because \sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}=\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{n}{n+1}}{1+\dfrac{n}{n+1}}}=\sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}$,

---

例 2 当 m 为何值时, 直线 $2x-y+m=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 相交、相切、相离?

解法 1: 把 $y=2x+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 中, 消去 y 得 $9x^2+8mx+2m^2-4=0$.

$\Delta=(8m)^2-4\times9(2m^2-4)=-8m^2+144$.

由 $\Delta>0$ 得 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$; $\Delta=0$ 得 $m=\pm3\sqrt{2}$; $\Delta<0$ 得 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$.

所以当 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$ 时, 直线 $2x-y+m=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 相交; 当 $m=\pm3\sqrt{2}$ 时, 直线 $2x-y+m=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 相切; 当 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$ 时, 直线 $2x-y+m=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 相离.

解法 2: 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 中, $a^2=4$, $b^2=2$.

设直线 $x=-2$, $x=2$ 与直线 $2x-y+m=0$ 的交点的纵坐标分别为 y_1、y_2, 则 $y_1=-4+m$, $y_2=4+m$, $y_1y_2=m^2-16$.

由 $y_1y_2<b^2$, 即 $m^2<18$, 得 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$; 由 $y_1y_2=b^2$, 即 $m^2=18$, 得 $m=\pm3\sqrt{2}$; 由 $y_1y_2>b^2$, 即 $m^2>18$, 得 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$. 以下同解法 1.

解法 3: 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$、$F_2(\sqrt{2},0)$, 点 F_1 与 F_2 到直线 $2x-y+m=0$ 的距离分别为 $d_1=\dfrac{|-2\sqrt{2}+m|}{\sqrt{5}}$, $d_2=\dfrac{|2\sqrt{2}+m|}{\sqrt{5}}$, $d_1\cdot d_2=\dfrac{|m^2-8|}{5}$.

由 $d_1\cdot d_2<b^2$, 即 $\dfrac{|m^2-8|}{5}<2$, 得 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$; 由 $d_1\cdot d_2=b^2$, 即 $\dfrac{|m^2-8|}{5}=2$, 得 $m=\pm3\sqrt{2}$; 由 $d_1\cdot d_2>b^2$, 即 $\dfrac{|m^2-8|}{5}>2$, 得 $m<-3\sqrt{2}$ 或 $m>3\sqrt{2}$. 以下同解法 1.

参考文献

[1] 朱友忠. 类比探究直线与椭圆的位置关系 [J]. 数学通讯, 2011 (10 下半月): 16-18.

[2] 姜坤崇. 直线与椭圆、双曲线位置关系的又一判别方法 [J]. 数学教学, 2011(1): 36.

只需证: $x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot \cdots \cdot x_{2n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \cdot \times \frac{2n-1}{2n} < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$, 即需证 $\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}\right)^2 < \frac{1}{2n+1}$.

法1: 设 $A_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$, 即需证 $A_n^2 < \frac{1}{2n+1}$. 因为 $\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$, 所以 $A_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1}$, 两边同乘 A_n 得: $A_n^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$.

小结: 要证明的不等式是 $A_n^2 < B_n$ 的形式, 但是左边的式子无法计算出来, 必须将其转化成可以计算出来的式子, 同时兼顾不等式, 可以构造出另外一个数列 $C_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1}$. $\because A_n < C_n$, $\therefore A_n^2 < A_nC_n$, 其中 A_nC_n 可以通过累乘方法计算出结果.

法2: 设 $B_n = \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$, 即证 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \cdots \cdot \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$ 成立. 如果能证明 $\frac{2n-1}{2n} < \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$, 则问题解决, 两边平方得 $\frac{2n-1}{4n^2} < \frac{1}{2n+1}$, 即证 $4n^2 - 1 < 4n^2$, 而该式显然成立.

例2 对任意正自然数 n, 求证: $(1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3n-2}\right) > \sqrt[3]{3n+1}$.

证明: 法1: 设 $A_n = (1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3n-2}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{3n-4}{3n-5} \cdot \frac{3n-1}{3n-2}$, 构造 $B_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{8} \cdot \cdots \cdot \frac{3n-3}{3n-4} \cdot \frac{3n}{3n-1}$, $C_n = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{10}{9} \cdot \cdots \cdot \frac{3n-2}{3n-3} \cdot \frac{3n+1}{3n}$. 因为对任意正自然数 n, 都有:

$1 + \frac{1}{3n-2} = \frac{3n-1}{3n-2} > 1 + \frac{1}{3n-1} = \frac{3n}{3n-1}$, $1 + \frac{1}{3n-2} = \frac{3n-1}{3n-2} > 1 + \frac{1}{3n} = \frac{3n+1}{3n}$.

$\therefore A_n > B_n > 0$ 且 $A_n > C_n > 0$,

$\therefore A_n^3 > A_nB_nC_n = \frac{3n+1}{1} = 3n+1$,

$\therefore (1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3n-2}\right) > \sqrt[3]{3n+1}$.

法2: 构造一个与左边类似的数列的乘积, 使得 $\prod_{k=1}^{n} B_k = \sqrt[3]{3n+1}$, 易求得 $B_n = \sqrt[3]{\frac{3n+1}{3n-2}}$.

设 $B_n = \sqrt[3]{\frac{3n+1}{3n-2}}$, 即证 $(1+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{3n-2}\right) > \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{7}{4}} \cdot \cdots \cdot \sqrt[3]{\frac{3n+1}{3n-2}}$ 成立.

如果能证明 $\frac{3n-1}{3n-2} > \sqrt[3]{\frac{3n+1}{3n-2}}$, 则问题解决, 两边立方得 $\frac{(3n-1)^3}{(3n-2)^2} > 3n+1$,

即证 $9n > 5$, 而该式显然成立.

小结: 本题也可以先从左或右边出发进行计算. 为了从左边开始进行计算, 构造了 B_n、C_n 两个数列, 最后得出 $A_nB_nC_n = \frac{3n+1}{1} = 3n+1$, 问题得到解决. 同例1一样也可以从右边着手进行计算, 构造数列的乘积, 只需要比较通项的大小关系即可.

例3 已知函数 $F(x) = e^x + e^{-x}$, 求证: $F(1) \cdot F(2) \cdot \cdots \cdot F(n) > (e^{n+1} + 2)^{\frac{n}{2}}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

证明: $F(x) = e^x + e^{-x}$, $F(1) = e + e^{-1}$, $F(n) = e^n + e^{-n}$, 要证 $F(1) \cdot F(2) \cdot \cdots \cdot F(n) > (e^{n+1} + 2)^{\frac{n}{2}}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 成立, 只需证 $[F(1) \cdot F(2) \cdot \cdots \cdot F(n)]^2 > (e^{n+1} + 2)^n$ 成立.

$F(1) \cdot F(n) = e^{n+1} + e^{-1+n} + e^{1-n} + e^{-1-n} > e^{n+1} + 2$;

$F(2) \cdot F(n-1) = e^{n+1} + e^{-3+n} + e^{3-n} + e^{-1-n} > e^{n+1} + 2$;

$\cdots$;

$F(n) \cdot F(1) > e^{n+1} + 2$.

将上面 n 个式子相乘得: $[F(1) \cdot F(2) \cdot \cdots \cdot F(n)]^2 > (e^{n+1} + 2)^n$.

小结: 此题用例1、例2的方法无论从左到右, 还是从右到左, 都较难进行计算. 关键幂的次数是 n 次, 也正是这 n 次, 给我们提供

了思路: n 次就说明有 n 个因式相乘(例1、例2的求证式中是没有 n 次幂的, 说明最后是需要抵消的), 必须逐项考察, 构造的式子不需要从外部搜求, 只需要从自身寻找, 借助等差数列求前 n 项和公式的思路, 利用首尾配对即可.

例4 证明: $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n>\sqrt{n^n}(n>2)$.

分析: 要证 $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n>\sqrt{n^n}$, 只要证 $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n)^2>n^n$,

即证 $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1>\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{n\text{个}n}$, 考察每项与 n 的关系即可!

证明: 构造数列 $a_k=k[n-(k-1)]$, $b_k=n\,(1\leqslant k\leqslant n, n>2)$,

$a_k-b_k=(k-1)(n-k)$, 所以 $a_k\geqslant b_k$ 当且仅当 $k=1$ 或 $k=n$ 时, 等号成立. 即

$1\times n=n, 2\times(n-1)>n, 3\times(n-2)\geqslant n,\cdots,n\times 1=n$.

上面 n 个式子相乘: $1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1>\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{n\text{个}n}$, 即 $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n)^2>n^n$, 就是 $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n>\sqrt{n^n}$.

小结: 此题结构特点与例3类似, 还是这个 n 次幂, 给我们提供了思路: n 次就说明有 n 个因式相乘, 说明必须逐项考察, 构造的式子不需要从外部搜求, 利用首尾配对即可.

例5 已知 a、b 为正数, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$, 试证: 对每一个 $n\in\mathbf{N}^*$, $(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.

分析: 初步验证待证式等号成立条件是 $a=b=2$, 待证式左边含 a、b, 右边不含 a、b. 意味着此题可能需要将待证式左边变成一个关于 a、b 的函数, 应用基本不等式, 变到右边! 而右边有 n 次幂, 需要 n 项, 故想到利用首尾配对法.

证明: 由 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ 得 $ab=a+b$. 又 $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 4$, 故 $ab=a+b\geqslant 4$.

令 $f(a,b)=(a+b)^n-a^n-b^n$, 当 $n=1$ 时, 原不等式等号成立. 当 $n\geqslant 2$ 时,

$f(a,b)=C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}$,

$f(a,b)=C_n^{n-1}ab^{n-1}+\cdots+C_n^{n-r}a^rb^{n-r}+\cdots+C_n^1a^{n-1}b$, 因为 $C_n^r=C_n^{n-r}(1\leqslant r\leqslant n-1)$, 两式加得 $2f(a,b)=C_n^1(a^{n-1}b+ab^{n-1})+\cdots+C_n^r(a^{n-r}b^r+a^rb^{n-r})+\cdots+C_n^{n-1}(ab^{n-1}+a^{n-1}b)$,

而 a、b 为正数, 故 $a^{n-r}b^r+a^rb^{n-r}\geqslant 2\sqrt{a^nb^n}\geqslant 2\cdot 4^{\frac{n}{2}}=2^{n+1}(1\leqslant r\leqslant n-1)$, 则 $2f(a,b)\geqslant(C_n^1+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^{n-1})2^{n+1}=(2^n-2)2^{n+1}$,

所以 $f(a,b)\geqslant(2^n-2)2^n=2^{2n}-2^{n+1}$, 即对每一个 $n\in\mathbf{N}^*$, $(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$ (等号成立当且仅当 $a=b=2$).

例6 设 $b>0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=b$, $a_n=\dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}(n\geqslant 2)$.

证明: 对于一切正整数 n, $a_n\leqslant\dfrac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$.

分析: 由递推关系可以求得 a_n 的表达式. 此不等式中 $b>0$, 意味着对一切 $b>0$, 此不等式恒成立. 如果我们把要证的不等式看作关于 b 的函数, 求此函数的最小值即可, b 为正数, 意味着可能需要应用基本不等式. n 次幂出现, 需要 n 项而且要用配对方法.

证明: 由 $a_n=\dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}$ 得 $\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{2}{b}\cdot\dfrac{n-1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{b}$. 当 $b=2$ 时, $\dfrac{n}{a_n}-\dfrac{n-1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$, 所以 $\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\}$ 是以首项为 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$, 公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列, 所以 $\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$, 从而 $a_n=2$. 当 $b\neq 2$ 时, $\dfrac{n}{a_n}+\dfrac{1}{2-b}=\dfrac{2}{b}\left(\dfrac{n-1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{2-b}\right)$, 所以 $\left\{\dfrac{n}{a_n}+\dfrac{1}{2-b}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2-b}=\dfrac{2}{b(2-b)}$, 公比为 $\dfrac{2}{b}$ 的等比数列, 所以 $\dfrac{n}{a_n}+\dfrac{1}{2-b}=\dfrac{2}{b(2-b)}\cdot\left(\dfrac{2}{b}\right)^{n-1}=\dfrac{2^n}{b^n(2-b)}$, 从而 $a_n=\dfrac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}$.

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}2, & b=2,\\ \dfrac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}, & b\neq 2.\end{cases}$$

当 $b=2$ 时, 结论显然成立.

(下转第9-1页)

对一个轨迹问题的变式探究

201600 上海市松江二中 张忠旺

题目: 长为$2a$的线段AB的两个端点A和B分别在x轴和y轴上滑动, 求线段AB的中点的轨迹方程.

这是人教A版数学必修2第124页B组第2题. 易得点P的轨迹方程为$x^2+y^2=a^2$. 如果就题论题, 那么我们就会失去一次培养学生探究能力的机会. 如果借助《几何画板》, 改变问题的条件, 那么可以得到多姿多彩的曲线. 现将我们的探究过程介绍如下.

1. 改变动点的位置, 探究动点的轨迹

结论1.1 长为l的线段AB的两个端点A和B分别在x轴、y轴上滑动, 点P在直线AB上, 且满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}(\lambda\neq 0,\pm1)$, 则点$P$的轨迹为椭圆.

证明: 如图1, 设$P(x,y)$,$A(x_1,0)$,$B(0,y_1)$, 则由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$得

$$\begin{cases} x_1=(1+\lambda)x, \\ y_1=\dfrac{1+\lambda}{\lambda}y. \end{cases}$$

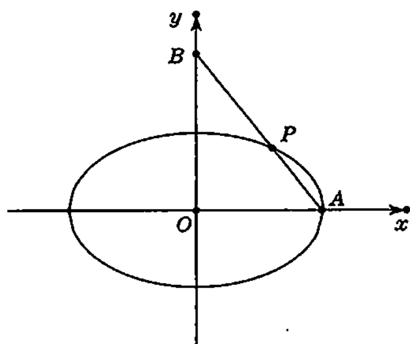


图1

由$x_1^2+y_1^2=l^2$得

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{l}{1+\lambda}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{\lambda l}{1+\lambda}\right)^2}=1.$$

当$0<|\lambda|<1$时, 点P的轨迹为焦点在x轴上的椭圆; 当$|\lambda|>1$时, 点P的轨迹为焦点在y轴上的椭圆.

结论1.2 长为l的线段AB的两个端点A和B分别在x轴y轴上滑动, 线段AB的包络是星形线, 其方程为$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$, 如图2.

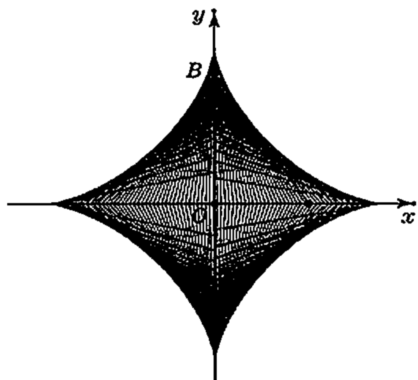


图2

证明: (1) 先证任意直线AB: $\dfrac{x}{\cos\theta}+\dfrac{y}{\sin\theta}=l$与$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$相切.

由$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos\theta}+\dfrac{y}{\sin\theta}=l, \\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}, \end{cases}$得$\begin{cases} x=l\cos^3\theta, \\ y=l\sin^3\theta \end{cases}$是直线与包络线的公共点. 易证星形线在点$(l\cos^3\theta,l\sin^3\theta)$的切线为$\dfrac{x}{\cos\theta}+\dfrac{y}{\sin\theta}=l$, 故直线$AB$与星形线切于点$(l\cos^3\theta,l\sin^3\theta)$.

(2) 对曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$上的任意一点, 都有满足条件的线段$AB$.

设过曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$上的任意一点$P(x_0,y_0)$的切线斜率为$k$, 则$k=y'=-\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}$, 利用点斜式写出过点$P$的切线方程为$y-y_0=-\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x-x_0)$, 整理得$\dfrac{x}{\left(\dfrac{x_0}{l}\right)^{\frac{1}{3}}l}+\dfrac{y}{\left(\dfrac{y_0}{l}\right)^{\frac{1}{3}}l}=1$, 它与两个坐标轴上的交点分别为$A\left(\left(\dfrac{x_0}{l}\right)^{\frac{1}{3}}l,0\right)$,

$B\left(0,\left(\frac{y_0}{l}\right)^{\frac{1}{3}}l\right)$, 切线夹在两坐标轴的线段$AB$的长为$\sqrt{\left(\frac{x_0}{l}\right)^{\frac{2}{3}}l^2+\left(\frac{y_0}{l}\right)^{\frac{2}{3}}l^2}=l$.

这样我们就证明了线段AB的包络曲线的方程为$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$.

结论1.3 长为l的线段AB的两个端点A和B分别在x轴y轴上滑动, 过原点作线段AB的垂线, 垂足C的轨迹为四叶玫瑰线, 其方程为$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=lxy$, 如图3.

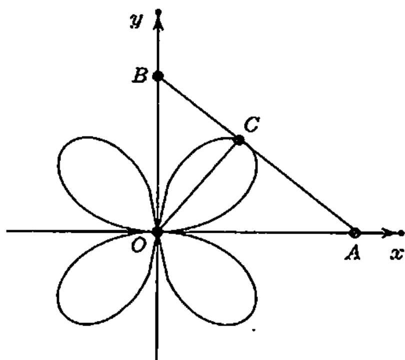


图3

证明: 设$C(x,y)$, $\angle AOC=\theta$, 则$\tan\theta=\frac{y}{x}$, $OC=l\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}l\sin 2\theta=\frac{l\cdot\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$, 坐标化得$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{l\cdot\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$, 化简得

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=lxy.$$

下面我们变换角度看原问题. 作一个半径为$2a$的圆O和以AB为直径的动圆C, 如图4, 则圆O与圆C内切, 当A、B分别在x、y轴上滑动时, 圆C在大圆O内壁滚动. 根据运动的相对性, 当圆C在大圆O内壁滚动时, 圆C的直径AB的两端在x、y轴上滑动. 因此, 当圆C在大圆O内壁滚动一周时, 直径AB两端的轨迹是两条互相垂直的线段. 于是我们有如下结论.

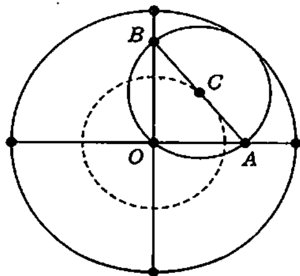


图4

结论1.4 一个直径为a的小圆沿着直径为$2a$的大圆的内壁逆时针方向滚动, A和B是小圆的一条固定直径的两个端点, 当小圆滚过大圆内壁的一周, 点A、B在大圆内的轨迹是两条互相垂直的线段.

此即是2011年江西省高考数学试卷第10题.

2. 满足一定条件的动线段AB在x、y轴上滑动时, 探究相关点的轨迹

结论2.1 动线段AB的两个端点A和B分别在x轴y轴上滑动, 三角形OAB的面积为定值S, 则线段AB的中点的轨迹为一对双曲线, 其方程为$xy=\pm\frac{S}{2}$. 且它就是直线AB的包络曲线.

结论2.2 动线段AB的两个端点A和B分别在x轴y轴的正半轴上滑动, 三角形OAB的周长为定值p, 则线段AB的中点M的轨迹为双曲线的一部分, 其方程为

$2xy-px-py+\frac{p^2}{4}=0\,(0<x<\frac{p}{4})$. 线段$AB$的包络曲线是以该双曲线实轴为直径的圆的四分之一.

证明: 如图5, 设$M(x,y)$, 则$A(2x,0)$, $B(0,2y)$,

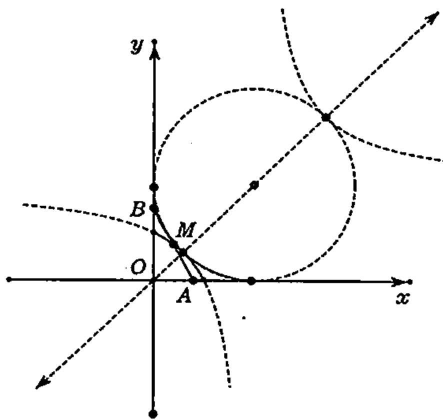


图5

由已知得$2x+2y+\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}=p$,

化简得$2xy-px-py+\frac{p^2}{4}=0$,

因为$|OA|<|AB|<\frac{p}{2}$, 所以$0<x<\frac{p}{4}$.

双曲线的中心为$\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$, 下面证明点$\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$到直线$AB$的距离为常数.

直线AB的方程为$y_1x+x_1y=x_1y_1$,

由 $x_1+y_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2}=p$ 得 $px_1+py_1-\frac{p^2}{2}=x_1y_1$,

$$d=\frac{\left|\frac{p}{2}x_1+\frac{p}{2}y_1-x_1y_1\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{\left|\frac{p^2}{2}-\frac{p}{2}x_1-\frac{p}{2}y_1\right|}{(p-x_1-y_1)}=\frac{p}{2},$$

所以直线 AB 与圆 $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}$ 相切, 故线段 AB 的包络曲线是以该双曲线实轴为直径的圆的四分之一.

3. 类比椭圆的画法, 探究新轨迹

根据原问题我们可以得到椭圆的一种几何画法: 在圆 O 上任取一点 M, 过 M 分别作 x 轴、y 轴的垂线, 垂足是 A、B; 作直线 AB, 在直线 AB 上取一点 P (异于 A、B 和线段 AB 中点); 当点 M 在圆上运动时, 点 P 的轨迹就是椭圆, 如图6.

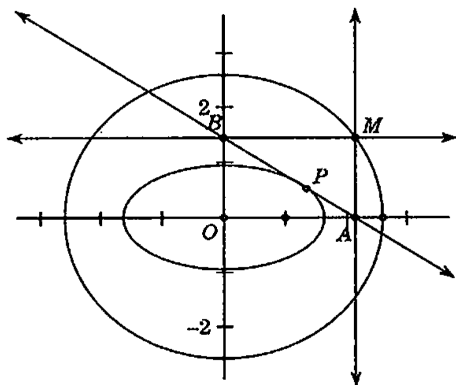


图6

如果将以上画法中的圆变换为直线, 我们利用《几何画板》探究相关点的轨迹, 得如下结论.

结论3.1 在定直线 $l: mx+ny=1\,(mn\neq 0)$ 上任取一点 $M(x_1,y_1)\,(x_1+y_1\neq 0)$, 过 M 分别作 x 轴、y 轴的垂线, 垂足为 A、B, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{x_1}{y_1}\cdot\overrightarrow{PB}$, 则点 P 的轨迹在直线 $y=x$ 上.

(1) 当 $m=n$ 时, 若 $m>0$, 点 P 的轨迹方程为 $y=x(x\leqslant\frac{1}{4m})$; 若 $m<0$, 点 P 轨迹方程为 $y=x(x\geqslant\frac{1}{4m})$.

(2) 当 $m\neq n$ 时, 若 $m>0$, $n>0$, 点 P 的轨迹方程为

$$y=x\left(x\in\left(-\infty,\frac{1}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}\right]\cup\left[\frac{1}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2},+\infty\right)\right);$$

若 $m<0$, $n<0$, 点 P 的轨迹方程为

$$y=x\left(x\in\left(-\infty,-\frac{1}{(\sqrt{-m}-\sqrt{-n})^2}\right]\cup\left[-\frac{1}{(\sqrt{-m}+\sqrt{-n})^2},+\infty\right)\right);$$

若 $mn<0$, 点 P 的轨迹方程为 $y=x$.

证明: 设 $P(x,y)$, 由 $\overrightarrow{AP}=\frac{x_1}{y_1}\cdot\overrightarrow{PB}$ 得, $(x-x_1,y)=\frac{x_1}{y_1}\cdot(-x,y_1-y)$,

由此得 $\begin{cases}x=\frac{x_1y_1}{x_1+y_1},\\ y=\frac{x_1y_1}{x_1+y_1},\end{cases}$

消去参数得 $y=x$. 下面讨论 x 的取值范围.

由 $mx_1+ny_1=1$,

得 $x=\frac{x_1y_1}{x_1+y_1}=\frac{-mx_1^2+x_1}{1-(m-n)x_1}$,

(1) 当 $m=n$ 时, $x=-mx_1^2+x_1=-m\left(x_1-\frac{1}{2m}\right)^2+\frac{1}{4m}$, $m>0$ 时, 点 P 的轨迹方程为 $y=x\left(x\leqslant\frac{1}{4m}\right)$; $m<0$ 时, 点 P 的轨迹方程为 $y=x\left(x\geqslant\frac{1}{4m}\right)$, 如图7(1).

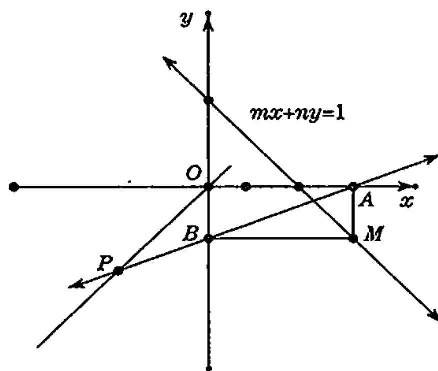


图7(1)

(2) 当 $m\neq n$ 时, 令 $t=1-(m-n)x_1$,

$$x=\frac{-mx_1^2+x_1}{1-(m-n)x_1}=\frac{m+n}{(m-n)^2}-\frac{1}{(m-n)^2}\left(mt+\frac{n}{t}\right),$$

1) 当 $m>0$, $n>0$ 时,

$$mt+\frac{n}{t}\in(-\infty,-2\sqrt{mn}]\cup[2\sqrt{mn},+\infty),$$

$$x\in\left(-\infty,\frac{1}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}\right]\cup\left[\frac{1}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2},+\infty\right),$$

此时点P的轨迹方程为

$$y=x\left(x\in\left(-\infty,\frac{1}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}\right]\cup\left[\frac{1}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2},+\infty\right)\right),$$ 如图7(2).

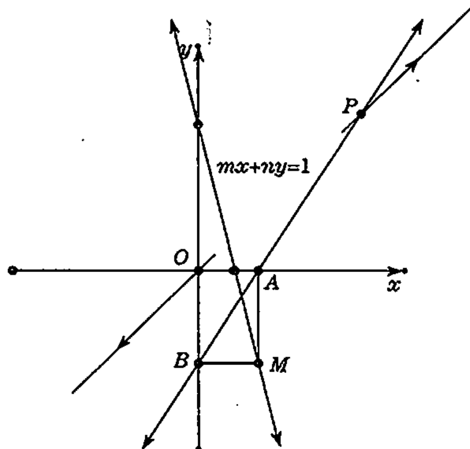


图7(2)

2) 当$m<0$, $n<0$时, 同理可得, 点P的轨迹方程为

$$y=x\left(x\in\left(-\infty,-\frac{1}{(\sqrt{-m}-\sqrt{-n})^2}\right]\cup\left[-\frac{1}{(\sqrt{-m}+\sqrt{-n})^2},+\infty\right)\right).$$

3) 当$mn<0$时, $mt+\frac{n}{t}\in\mathbf{R}$, 所以$x\in\mathbf{R}$, 此时点$P$的轨迹方程为$y=x$.

结论3.2 在定直线$l: mx+ny=1\ (mn\neq0)$上任取一点$M(x_1,y_1)(x_1+y_1\neq0)$, 过M分别作x轴、y轴的垂线, 垂足为A、B, 点P满足$\overrightarrow{AP}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\overrightarrow{PB}$, 则点$P$的轨迹方程为$m^2x^2-(m^2+n^2)xy+n^2y^2-2mx-2ny+1=0$.

当$m\pm n=0$时, 方程表示抛物线; 当$m\pm n\neq0$时, 方程表示双曲线.

证明: 设$P(x,y)$, 由$\overrightarrow{AP}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\overrightarrow{PB}$得

$(x-x_1,y)=\frac{y_1}{x_1}\cdot(-x,y_1-y)$由此得

$$\begin{cases}(x_1+y_1)=x_1^2, & \cdots\cdots ①\\ (x_1+y_1)=y_1^2, & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①-②得$x-y=x_1-y_1$, $\cdots\cdots$ ③

将③与$mx_1+ny_1=1$联立, 解得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{n(x-y)+1}{m+n},\\ y_1=\dfrac{1-m(x-y)}{m+n},\end{cases}$$

代入①化简得

$m^2x^2-(m^2+n^2)xy+n^2y^2-2mx-2ny+1=0$, $\cdots\cdots$ ④

(1) 当$m\pm n=0$时, $\Delta=(m^2+n^2)^2-4m^2n^2=(m^2-n^2)^2=0$, ④表示抛物线, 如图8(1).

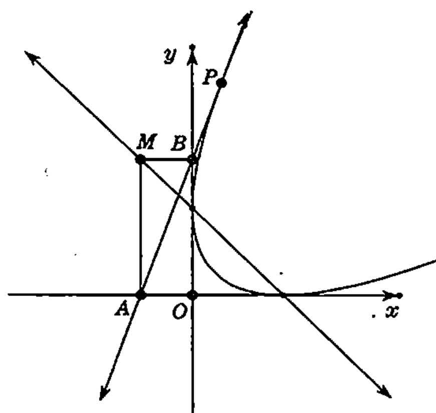


图8(1)

(2) 当$m\pm n\neq0$时, $\Delta=(m^2-n^2)^2>0$, ④表示双曲线, 如图8(2).

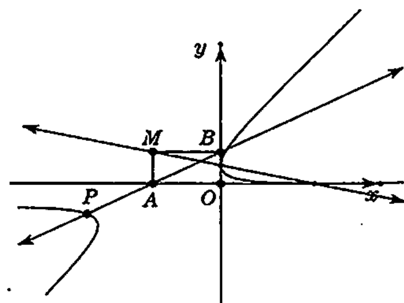


图8(2)

结论3.3 在定直线$l: mx+ny=1\ (mn\neq0)$上任取一点$M(x_1,y_1)\ (x_1+y_1\neq0)$, 过$M$分别作$x$轴、$y$轴的垂线, 垂足为$A$、$B$, 点$P$满足$\overrightarrow{AP}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\overrightarrow{PM}$, 则点$P$的轨迹方程为$m^2x^2+n(m-n)xy-2mx-ny+1=0$, 当$m=n$时, 轨迹为抛物线; 当$m\neq n$时, 轨迹为双曲线.

4. 将直角$\angle AOB$变换为非直角, 探究相关点的轨迹

由于结论与垂直情形类似, 我们只写出两个相关结论, 其他的轨迹问题留给读者自己讨论.

两道竞赛题的纠错

830002 新疆生产建设兵团第二中学 张国治
835802 新疆伊犁新源县第八中学 马 祯

在每年的全国数学联赛备考中, 难免需要仔细研究往年试题, 笔者发现2011年全国及各省的预赛题中某些题目本身有错误, 本文仅做纠错, 不当之处请指正, 也期待读者更深层次的研究.

题1 (2011年全国高中数学联赛贵州省预赛第8题) 定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(0)=0$, $f(x)+f(1-x)=1$, $f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}f(x)$, 且当$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$时, 有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则$f\left(\frac{1}{2011}\right)=$______.

解析(竞赛组提供的答案): 因为$f(0)=0$, $f(x)+f(1-x)=1$, $f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}f(x)$, 所以$f(1)=1$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. 又因为$x\in\mathbf{R}$, 且当$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$时, 有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 所以$x\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$时, 恒有$f(x)=\frac{1}{2}$. 所以$f\left(\frac{1}{2011}\right)=f\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2011}\right)=$

结论4.1 线段AB的两端点分别在两条相交(不垂直)直线上滑动, 则该线段的中点的轨迹为椭圆.

结论4.2 设$\angle AOB=\alpha\,(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$, 线段$AB$的两端点分别在射线$OA$、$OB$上滑动, 三角形$OAB$的周长为定值$p$, 则该线段的中点的轨迹为双曲线的一部分.

两个结论的证明方法类似, 下面我们只给出结论4.2的证明.

证明: 以$\angle AOB$的平分线为x轴, 顶点O为原点建立直角坐标系, 如图9.

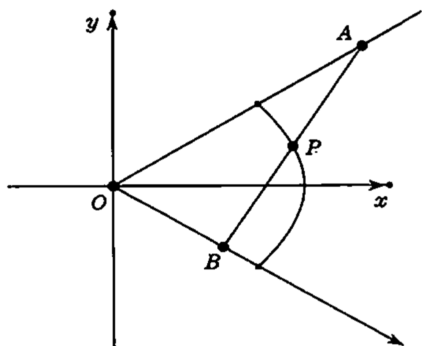


图9

设OA、OB的方程分别为$y=kx, y=-kx\left(k=\tan\frac{\alpha}{2}\right)$, 设$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $P(x,y)$, 则由已知条件得

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=p,$$

$$y_1-y_2=k(x_1+x_2)=2kx,$$

$$x_1-x_2=\frac{1}{k}(y_1+y_2)=\frac{2y}{k},$$

上式化为

$$\sqrt{1+k^2}\cdot 2x+\sqrt{\left(\frac{2y}{k}\right)^2+(2kx)^2}=p,$$

化简得

$$\frac{\left(x-\frac{p\sqrt{1+k^2}}{2}\right)^2}{\frac{p^2k^2}{4}}-\frac{y^2}{\frac{p^2k^4}{4}}=1\left(\frac{p}{4\sqrt{1+k^2}}<x\leqslant\frac{p(\sqrt{1+k^2}-k)}{2}\right).$$

以上我们从四个不同的角度对一个习题进行变式探究, 借助《几何画板》获得了许多精彩的结论, 其本质是从条件的变化中寻找不变的规律. 在平时教学中, 如果我们注意选择典型问题, 坚持变式探究, 对提高学生的探究意识, 培养学生的数学能力是大有裨益的.

$\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2011}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3^2}{2011}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$. $f\left(\frac{3^2}{2011}\right)=\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)^6 f\left(\frac{3^6}{2011}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^6$. $\frac{1}{2}=\frac{1}{128}\left(因为\frac{1}{3}<\frac{3^6}{2011}<\frac{1}{2}\right)$.

试题的纠错：上述解答似乎天衣无缝，无懈可击，但题目本身是有瑕疵的一道错题. 首先，由$f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}f(x)$可推得$f(0)=0$，可见题设条件$f(0)=0$是多余的；其次，一方面由题设条件得$2f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)=1-f(1-x)$，令$x=0$得$2f(0)=f(0)=1-f(1)$，$f(1)=1$，再令$x=3$得$f(-2)=-1$. 另一方面，连续运用题设条件$f(x)+f(1-x)=1$和$f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}f(x)$，得$f(-2)=2f\left(-\frac{2}{3}\right)=4f\left(-\frac{2}{9}\right)=4\left[1-f\left(\frac{11}{9}\right)\right]=4\left[1-2f\left(\frac{11}{27}\right)\right]=0$ $\left(因为\frac{1}{3}<\frac{11}{27}<\frac{1}{2}\right)$. 这显然与函数的定义相矛盾，故此题实际上是一道错题.

试题的修正：定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x)+f(1-x)=1$，当$x\geqslant 0$时，$f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}f(x)$，且当$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$时，有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则$f\left(\frac{1}{2011}\right)=$________.

题2 (2011年全国数学联赛B卷一试第5题) 若$\triangle ABC$中的角A、C满足$5(\cos A+\cos C)+4(\cos A\cos C+1)=0$，则$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=$________.

解析(竞赛组提供的答案)：因为$\cos A=\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$，$\cos C=\dfrac{1-\tan^2\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$，将其代入已知等式并化简整理，得$\tan^2\frac{A}{2}\cdot\tan^2\frac{C}{2}=9$. 又因为$\frac{A}{2}$、$\frac{C}{2}$均为锐角，所以$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}>0$，故$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=3$.

试题的纠错：上述解答似乎天衣无缝，无懈可击，但题目本身是有瑕疵的一道错题. 由题设条件得$4(\cos A\cos C+1)=-5(\cos A+\cos C)$，因为对任意$\triangle ABC$，都有$|\cos A\cos C|=|\cos A|\cdot|\cos C|<1$，即$-1<\cos A\cos C<1$，故$4(\cos A\cos C+1)=-5(\cos A+\cos C)>0$，因此$\cos A+\cos C<0$，即$\cos A<-\cos C=\cos(\pi-C)$. 因为$\pi-C$、$A\in(0,\pi)$，所以$A>\pi-C$，即$A+C>\pi$，这与三角形内角和定理相矛盾. 即符合题设条件的$\triangle ABC$不存在，故此题是条件不相容的一道错题.

事实上，对任意$\triangle ABC$有任意两角余弦之和均大于0的结论. 因此对任意$\triangle ABC$，都有$5(\cos A+\cos C)+4(\cos A\cos C+1)>0$. 若要锁定$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$的范围，由两角和的正切公式及诱导公式得

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$
$$=\tan\frac{B}{2}\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)\left(1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\right)+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=1,$$

易知$\tan\frac{A}{2}$、$\tan\frac{B}{2}$、$\tan\frac{C}{2}$均大于0，

故$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}$、$\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$、$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\in(0,1)$.

试题的修正：若$\triangle ABC$中的角A、C满足$5(\cos A+\cos C)-4(\cos A\cos C+1)=0$，则$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=$________.

总之，在试题编拟过程中，题设条件不能与本系统的公理、定理、已知的正确结论等相矛盾，而且题设的条件之间也不能互相矛盾. 同时题设各条件之间应既不重复也不多余，各条件之间没有因果关系. 题目中有过剩、非独立的条件，会造成题目臃肿，使解题者陷入思维误区，这就需要命题者全方位、多角度地仔细"精校".

参考文献

[1] 中国数学会普及工作委员会. 高中数学联赛备考手册(预赛试题集锦)[M]. 上海：华东师范大学出版社，2012.

《数学教学》两个数学问题的简证与加强

453000 河南新乡市第十中学 程 宏
450045 华北水利水电学院 袁合才

文[1]给出了《数学教学》2011年第2期数学问题与解答中第814题和第815题的解答,其证明过程较为繁琐且具有技巧性,笔者在此给出其较为简单的证明,并对第814题进行加强,给出其上确界.

第814题:设a、b、c、$d>0$,且$a+b+c+d=1$,求证:

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}<\frac{1}{1+abcd}. \qquad (1)$$

证明:令$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $x>0$,

则$f'(x)=(1+x)^{-2}$,

$f''(x)=-2(1+x)^{-3}<0$,

所以$f(x)$为凹函数.由琴生不等式得

$$\frac{1}{4}f(a)+\frac{1}{4}f(b)+\frac{1}{4}f(c)+\frac{1}{4}f(d)\leqslant f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{5},$$

所以$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\leqslant\dfrac{4}{5}$.

又$1=a+b+c+d\geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$,所以$abcd\leqslant\dfrac{1}{256}$,显然有$\dfrac{4}{5}<\dfrac{1}{1+\frac{1}{256}}\leqslant\dfrac{1}{1+abcd}$,

所以不等式(1)的右端可以加强为$\dfrac{4}{5}$,即$\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d}\leqslant\dfrac{4}{5}$,当且仅当$a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$时,等号成立.

第815题:已知$x_1,x_2,\cdots,x_n$为小于1的正数,且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,求证:

$$\frac{1}{x_1-x_1^3}+\frac{1}{x_2-x_2^3}+\cdots+\frac{1}{x_n-x_n^3}\geqslant\frac{n^4}{n^2-1}, \qquad (2)$$

当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$时等号成立.

文[1]的证明中用到下式:

$$\frac{1}{x-x^3}\geqslant\frac{(3-n^2)n^4}{(n^2-1)^2}x+\frac{(2n^2-4)n^3}{(n^2-1)^2}, \qquad (3)$$

但却没有给出构造(3)式的原因,具有较强的技巧性.笔者利用琴生不等式给出(2)式的简证.

证明:令$f(x)=\dfrac{1}{x-x^3}$, $0<x<1$,

则$f'(x)=(3x^2-1)(x-x^3)^{-2}$,

$$f''(x)=12(x-x^3)^{-3}\left[\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{48}\right]>0,$$

所以$f(x)$为凸函数.由琴生不等式得

$$\frac{1}{n}f(x_1)+\frac{1}{n}f(x_2)+\cdots+\frac{1}{n}f(x_n)\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^3}{n^2-1},$$

所以$\dfrac{1}{x_1-x_1^3}+\dfrac{1}{x_2-x_2^3}+\cdots+\dfrac{1}{x_n-x_n^3}\geqslant\dfrac{n^4}{n^2-1}$,当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$时等号成立.

参考文献

[1] 陈炳堂, 刘才华. 数学问题与解答[J]. 数学教学, 2011(2): 47.

(上接第9-22页)

[6] Biggs N L. Alagebraic Graph Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993: 112-117.

[7] Chartrand G and Lesniak L. Graphs and Digraphs [M]. California: Wadsworth Inc, 1986: 57-66.

先解决一个问题, 再解决一串问题

100071 北京丰台二中高中部 甘志国

本文中规定: 两条异面直线所成的角是锐角或直角, 两条相交直线所成的角是指它们相交所成的四个角中的较小者, 所以也是锐角或直角; 当两条直线平行或重合时, 它们所成的角是0°, 所以空间两直线 (包括重合的情形) 所成角的范围是[0°, 90°]. 空间的一条直线与一个平面所成角的范围也是[0°, 90°]. 本文中还规定: 两个相交平面所成的角是指它们相交所成的四个二面角中的较小者, 所以也是锐角或直角, 两个相交平面所成角的范围是 (0°, 90°].

问题1 若直线a、b所成的角为θ(θ是定值, 有$0° < \theta \leqslant 90°$), 则过空间一定点$P$与直线$a$、$b$所成的角均为$\gamma$($0° \leqslant \gamma \leqslant 90°$) 的直线有且仅有几条?

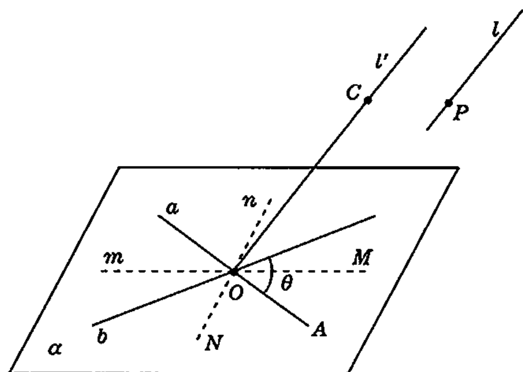


图1

解: 不妨设$a \cap b = O$, 如图1, 设过点O的直线l'与直线a、b所成的角均为γ. 又过点P作直线$l /\!/ l'$ (则l存在且唯一), 则直线l与直线a、b所成的角也均为γ, 所以问题1等价于"过点O与直线a、b所成的角均为γ的直线l'有且仅有几条". 设直线a、b所成的角及其补角的角平分线所在的直线分别为m、n (有$m \perp n$), 问题1的答案是:

(1) 当$0° < \theta < 90°$ 时:

①当$0° \leqslant \gamma < \frac{\theta}{2}$时, 所求的直线为0条;

②当$\gamma = \frac{\theta}{2}$, 所求的直线为1条, 即直线$a$、$b$所成锐角的角平分线所在的直线;

③当$\frac{\theta}{2} < \gamma < 90° - \frac{\theta}{2}$时, 所求的直线为2条, 且它们在平面$\alpha$内的射影均为$m$, $\angle COM = \arccos \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{\theta}{2}}$;

④当$\gamma = 90° - \frac{\theta}{2}$时, 所求的直线为3条, 且其中2条在平面$\alpha$内的射影均为$m$, $\angle COM = \arccos \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{\theta}{2}}$, 另一条就是$n$;

⑤当$90° - \frac{\theta}{2} < \gamma < 90°$时, 所求的直线为4条, 且其中2条在平面$\alpha$内的射影均为$m$, $\angle COM = \arccos \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{\theta}{2}}$, 另2条在平面$\alpha$内的射影均为$n$, $\angle CON = \arccos \frac{\cos\gamma}{\sin\frac{\theta}{2}}$;

⑥当$\gamma = 90°$时, 所求的直线为1条, 即过点O的平面α的垂线.

(2) 当$\theta = 90°$时:

①当$0° \leqslant \gamma < 45°$时, 所求的直线为0条;

②当$\gamma = 45°$, 所求的直线为2条, 即m、n;

③当$45° < \gamma < 90°$时, 所求的直线为4条, 且其中2条在平面α内的射影均为m, $\angle COM = \arccos(\sqrt{2}\cos\gamma)$, 另2条在平面$\alpha$内的射影均为$n$, $\angle CON = \arccos(\sqrt{2}\cos\gamma)$;

④当$\gamma = 90°$时, 所求的直线为1条, 即过点O的平面α的垂线.

说明: 由全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(下B)》(2006年人民教育出版社, 第2版)(下简称《教科书第二册(下B)》) 第28页第6题"从一个角的顶点引这个角所在平面的斜射线, 设它和已知

角两边的夹角为锐角且相等, 求证这条斜射线在平面内的射影是这个角的平分线" 的结论知, l' 在 α 内的射影为 m 或 n (包括 $l' \subset \alpha$ 的情形).

若过点 O 的直线 l' 在 α 内的射影为 m, 由《教科书第二册(下B)》)第48页的公式 "$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2$", 得 $\cos\angle COM \cdot \cos\angle MOA = \cos\angle COA$ (当 OC 与 OM 重合时也成立).

又 $\angle MOA = \frac{\theta}{2}$ (定值), 所以 $\angle COA$ 随 $\angle COM$ 的增大而增大, 且 $\angle COA \geqslant \frac{\theta}{2}$ (当且仅当 OC 与 OM 重合时取等号). 注意到 $\frac{\theta}{2} < 90^\circ - \frac{\theta}{2}$, 便可得结论成立.

问题1是一个常见问题, 下面再来解决相关的一串问题.

问题2 若直线 a、b 所成的角为 θ (θ 是定值, 有 $0^\circ < \theta \leqslant 90^\circ$), 则过空间一定点 P 与直线 a、b 所成的角均为 $90^\circ - \gamma$ ($0^\circ \leqslant 90^\circ - \gamma \leqslant 90^\circ$) 的平面有且仅有几个?

解: 因为所求平面与直线 a、b 所成的角均为 $90^\circ - \gamma \Longleftrightarrow$ 所求平面的垂线 l 与直线 a、b 所成的角均为 γ. 又过定点 P 的直线 l 的垂面是唯一确定的, 所以问题2与问题1是等价的, 因此两者答案相同.

问题3 若相交平面 α、β 所成的角为 θ (θ 是定值, 有 $0^\circ < \theta \leqslant 90^\circ$), 则过空间一定点 P 与平面 α、β 所成的角均为 $90^\circ - \gamma$ ($0^\circ \leqslant 90^\circ - \gamma \leqslant 90^\circ$) 的直线有且仅有几条?

解: 因为平面 α、β 所成的角为 $\theta \Longleftrightarrow$ 平面 α、β 的垂线所成的角为 θ; 所求直线 l 与平面 α、β 所成的角均为 $90^\circ - \gamma \Longleftrightarrow$ 所求直线 l 与平面 α、β 的垂线所成的角均为 γ, 所以问题3与问题1是等价的, 因此两者答案相同.

问题4 若相交平面 α、β 所成的角为 θ (θ 是定值, 有 $0^\circ < \theta \leqslant 90^\circ$), 则过空间一定点 P 与平面 α、β 所成的角均为 γ ($0^\circ \leqslant \gamma \leqslant 90^\circ$) 的平面有且仅有几个?

解: 因为所求平面与平面 α、β 所成的角均为 $\gamma \Longleftrightarrow$ 所求平面的垂线 l 与平面 α、β 所成的角均为 $90^\circ - \gamma$, 所以问题4与问题3是等价的, 因此两者答案相同.

问题5 若直线 a 与平面 β 所成的角为 $90^\circ - \theta$ ($90^\circ - \theta$ 是定值, $0^\circ < 90^\circ - \theta \leqslant 90^\circ$), 则过空间一定点 P 与直线 a、平面 β 所成的角分别为 γ、$90^\circ - \gamma$ ($0^\circ \leqslant \gamma \leqslant 90^\circ$) 的直线有且仅有几条?

解: 因为直线 a 与平面 β 所成的角为 $90^\circ - \theta \Longleftrightarrow$ 直线 a 与平面 β 的垂线所成的角为 θ; 所求直线 l 与平面 β 所成的角为 $90^\circ - \gamma \Longleftrightarrow$ 所求直线 l 与平面 β 的垂线所成的角为 γ, 所以问题5与问题1是等价的, 因此两者答案相同.

问题6 若直线 a 与平面 β 所成角为 $90^\circ - \theta$ ($90^\circ - \theta$ 是定值, $0^\circ < 90^\circ - \theta \leqslant 90^\circ$), 则过空间一定点 P 与直线 a、平面 β 所成的角分别为 $90^\circ - \gamma$、γ ($0^\circ \leqslant \gamma \leqslant 90^\circ$) 的平面有且仅有几个?

解: 因为所求平面与直线 a、平面 β 所成的角分别为 $90^\circ - \gamma$、$\gamma \Longleftrightarrow$ 所求平面的垂线与直线 a、平面 β 所成的角分别为 γ、$90^\circ - \gamma$, 所以问题6与问题5是等价的, 因而两者答案相同.

高考题1 (2004年高考湖北卷理科第11题) 已知平面 α 与 β 所成的锐二面角为 80°, P 为 α、β 外一定点, 过点 P 的一条直线与 α、β 所成的角都是 30°, 则这样的直线有且仅有 …………………………………( )

(A) 1条; (B) 2条; (C) 3条; (D) 4条.

解: 本题同问题3, 其中 $\theta = 80^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. 再由问题1解答的 (1) ⑤ 可得答案为 (D).

高考题2 (2009年高考重庆卷理科第9题) 已知二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小为 50°, P 为空间中任意一点, 则过点 P 且与平面 α 和平面 β 所成的角都是 25° 的直线的条数为 ……( )

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5.

解: 本题同问题3, 其中 $\theta = 50^\circ$, $\gamma = 65^\circ$. 再由问题1解答的 (1) ④ 可得答案为 (B).

新编题 已知异面直线 a、b 成 60° 角, 点 A 为空间中一点, 则过点 A 与 a、b 都成 45° 角的平面有且只有________个.

解: 本题同问题2, 其中 $\theta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. 再由问题1解答的 (1) ③ 可得答案为 2.

最后, 我们再来看一个问题 (当然, 读者还可把它转化成其他一些问题):

2012年上海市初中毕业统一学业考试

数学卷

本试卷共有25道试题，满分150分，考试时间100分钟.

一、选择题(本大题共6题，每题4分，满分24分)

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 在下列代数式中，次数为3的单项式是

(A) xy^2;　　(B) x^3+y^3;

(C) x^3y;　　(D) $3xy$.

问题7　如图2，点$O\in$平面α，l是空间的一条定直线，直线l与平面α所成的角为θ(θ是定值，有$0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$). 在平面$\alpha$内过点$O$与直线$l$所成的角为$\gamma$($0^\circ\leqslant\gamma\leqslant 90^\circ$)的直线有且仅有几条?

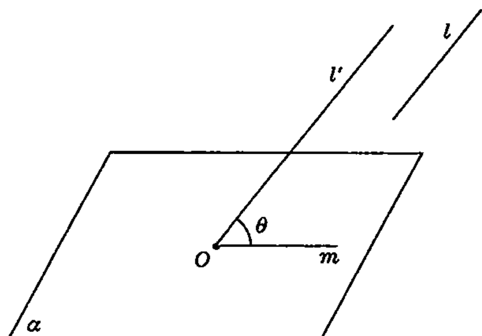


图2

解：如图2，过点O作直线$l'/\!/l$，得直线l'与其在平面α内的射影m所成的角为θ.

(1) 当$\theta=0^\circ$时:

①当$\gamma=0^\circ$或90°时，所求的直线为1条，即直线l'或直线l'在平面α内过点O的垂线;

②当$0^\circ<\gamma<90^\circ$时，所求的直线为2条.

(2) 当$\theta=90^\circ$时:

①当$0^\circ\leqslant\gamma<90^\circ$时，所求的直线为0条;

②当$\gamma=90^\circ$时，所求的直线为无数条，即平面α内过点O的任意直线.

(3) 当$0^\circ<\theta<90^\circ$时:

①当$0^\circ\leqslant\gamma<\theta$时，所求的直线为0条;

②当$\gamma=\theta$，所求的直线为1条，即直线l'在平面α内的射影m;

③当$\theta<\gamma\leqslant 90^\circ$时，所求的直线为2条，即与直线$l'$在平面$\alpha$内的射影$m$所成的角为$\arccos\dfrac{\cos\gamma}{\cos\theta}$的两条直线.

说明：(1)、(2)显然成立. 由《教科书第二册(下B)》)第48页的黑体字“平面的斜线和它在平面内的射影所成的角，是这条斜线和这个平面内任一条直线所成的角中最小的角”知(3)①、②成立.

如图3，设平面α内过点O的直线a与直线l'所成的角为γ，得$\cos\theta\cdot\cos\angle MOA=\cos\gamma$，即所求直线$a$与直线$m$所成的角$\angle MOA=\arccos\dfrac{\cos\gamma}{\cos\theta}$，易知它是锐角，所以所求的直线有且仅有2条(图3中的直线a、b)，且直线m是直线a、b所形成的一对对顶角的平分线. 由此可知(3)③成立.

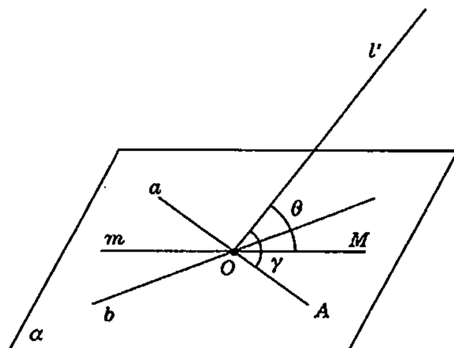


图3

参考文献

[1] 甘志国. 初等数学研究(II)下[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2009.

2. 数据5, 7, 5, 8, 6, 13, 5的中位数是

(A) 5; (B) 6; (C) 7; (D) 8.

3. 不等式组 $\begin{cases} -2x < 6, \\ x-2 > 0 \end{cases}$ 的解集是

(A) $x > -3$; (B) $x < -3$;

(C) $x > 2$; (D) $x < 2$.

4. 在下列各式中, 二次根式 $\sqrt{a-b}$ 的有理化因式是

(A) $\sqrt{a+b}$; (B) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

(C) $\sqrt{a-b}$; (D) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

5. 在下列图形中, 为中心对称图形的是

(A) 等腰梯形; (B) 平行四边形;

(C) 正五边形; (D) 等腰三角形.

6. 如果两圆的半径长分别为6和2, 圆心距为3, 那么这两圆的位置关系是

(A) 外离; (B) 相切; (C) 相交; (D) 内含.

二、填空题 (本大题共12题, 每题4分, 满分48分)

7. 计算: $\left|\dfrac{1}{2}-1\right|$ =________.

8. 分解因式: $xy-x$ =________.

9. 如果正比例函数 $y=kx$ (k是常数, $k \neq 0$) 的图像经过点 $(2,-3)$, 那么y的值随x的值增大而________ (填 "增大" 或 "减小").

10. 方程 $\sqrt{x+1}=2$ 的根是________.

11. 如果关于x的一元二次方程 $x^2-6x+c=0$ (c是常数) 没有实数根, 那么c的取值范围是________.

12. 将抛物线 $y=x^2+x$ 向下平移2个单位后, 所得新抛物线的表达式是________.

13. 布袋中装有3个红球和6个白球, 它们除颜色外其他都相同, 如果从布袋里随机摸出一个球, 那么所摸到的球恰好为红球的概率是________.

14. 某校500名学生参加生命安全知识测试, 测试分数均大于或等于60且小于100, 分数段的频率分布情况如表1所示 (其中每个分数段可包括最小值, 不包括最大值), 结合表1中的信息, 可得测试分数在80~90分数段的学生有________名.

表1

分数段	60–70	70–80	80–90	90–100
频率	0.2	0.25		0.25

15. 如图1, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD /\!/ BC$, $BC=2AD$, 如果 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AC}$ =________ (用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示).

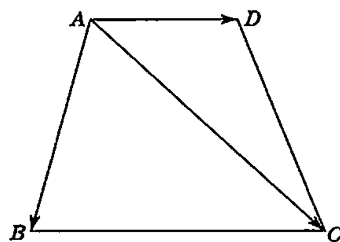


图1

16. 如图2, 在 $\triangle ABC$ 中, 点D、E分别在边AB、AC上, $\angle AED=\angle B$. 如果 $AE=2$, $\triangle ADE$ 的面积为4, 四边形$BCED$的面积为5, 那么边AB的长为________.

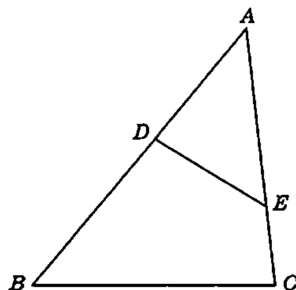


图2

17. 我们把两个三角形的重心之间的距离叫做重心距. 在同一平面内有两个边长相等的等边三角形, 如果当它们的一边重合时重心距为2, 那么当它们的一内角成对顶角时重心距为________.

18. 如图3, 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $BC=1$, 点D在边AC上, 将 $\triangle ADB$ 沿直线BD翻折后, 点A落在点E处. 如果 $AD \perp ED$, 那么线段DE的长为________.

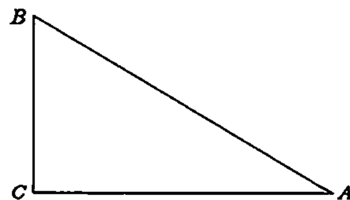


图3

三、解答题(本大题共7题, 满分78分)

19. (本题满分10分)

计算: $\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}-1)^2+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+3^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}$.

20. (本题满分10分)

解方程: $\frac{x}{x+3}+\frac{6}{x^2-9}=\frac{1}{x-3}$.

21. (本题满分10分, 第(1)小题满分4分, 第(2)小题满分6分)

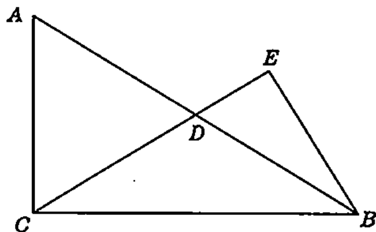


图4

如图4, 在Rt$\triangle ABC$中, $\angle ACB=90°$, D是边AB的中点, $BE\perp CD$, 垂足为点E. 已知$AC=15$, $\cos A=\frac{3}{5}$.

(1) 求线段CD的长;

(2) 求$\sin\angle DBE$的值.

22. (本题满分10分, 第(1)、(2)小题满分各5分)

某工厂生产一种产品, 当生产数量至少为10吨, 但不超过50吨时, 每吨的成本y(万元/吨)与生产数量x(吨)的函数关系如图5所示.

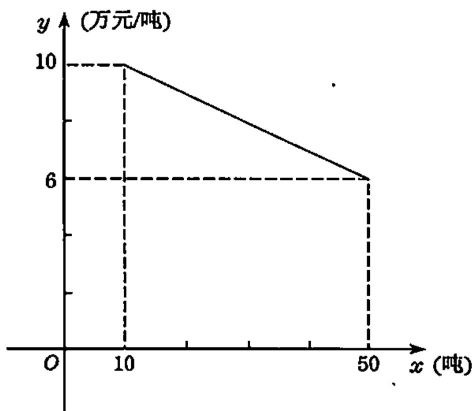


图5

(1) 求y关于x的函数解析式, 并写出它的定义域;

(2) 当生产这种产品的总成本为280万元时, 求该产品的生产数量.

(注: 总成本=每吨的成本×生产数量)

23. (本题满分12分, 第(1)小题满分5分, 第(2)小题满分7分)

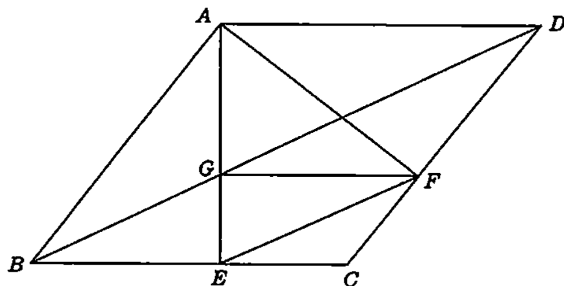


图6

已知: 如图6, 在菱形$ABCD$中, 点E、F分别在边BC、CD上, $\angle BAF=\angle DAE$, AE与BD交于点G.

(1) 求证: $BE=DF$;

(2) 当$\frac{DF}{FC}=\frac{AD}{DF}$时, 求证: 四边形$BEFG$是平行四边形.

24. (本题满分12分, 第(1)小题满分3分, 第(2)小题满分5分, 第(3)小题满分4分)

如图7, 在平面直角坐标系xOy中, 二次函数$y=ax^2+6x+c$的图像经过点$A(4,0)$、$B(-1,0)$, 与y轴交于点C, 点D在线段OC上, $OD=t$, 点E在第二象限, $\angle ADE=90°$, $\tan\angle DAE=\frac{1}{2}$, $EF\perp OD$, 垂足为点F.

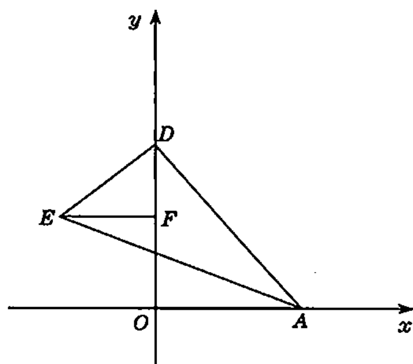


图7

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 求线段EF、OF的长(用含t的代数式表示);

(3) 当$\angle ECA=\angle OAC$时, 求t的值.

25. (本题满分14分, 第(1)小题满分3分, 第(2)小题满分5分, 第(3)小题满分6分)

如图8, 在半径长为2的扇形AOB中, $\angle AOB=90°$, 点C是$\overset{\frown}{AB}$上的一个动点(不与点A、B重合), $OD\perp BC$, $OE\perp AC$, 垂足分别为D、E.

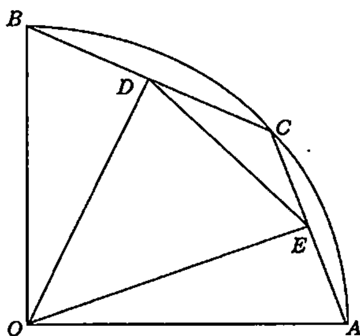


图8

(1) 当$BC=1$时, 求线段OD的长;

(2) 在$\triangle DOE$中是否存在长度保持不变的边? 如果存在, 请指出并求其长度; 如果不存在, 请说明理由;

(3) 设$BD=x$, $\triangle DOE$的面积为y, 求y关于x的函数解析式, 并写出它的定义域.

答案要点

一、选择题

1. A; 2. B; 3. C; 4. C; 5. B; 6. D.

二、填空题

7. $\frac{1}{2}$; 8. $x(y-1)$; 9. 减小; 10. $x=3$; 11. $c>9$; 12. $y=x^2+x-2$; 13. $\frac{1}{3}$; 14. 150; 15. $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$; 16. 3; 17. 4; 18. $\sqrt{3}-1$.

三、解答题

19. 解: 原式$=\frac{1}{2}(4-2\sqrt{3})+\sqrt{2}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=3$.

20. 解: 去分母, 得$x(x-3)+6=x+3$,

整理, 得$x^2-4x+3=0$,

解得$x_1=1$, $x_2=3$.

经检验, $x=3$是增根, $x=1$是原方程的根.

所以原方程的根是$x=1$.

21. 解: (1) 在Rt$\triangle ABC$中, $\angle ACB=90°$, $AC=15$, $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$,

$\therefore AB=25$.

$\because D$是AB的中点, $\therefore CD=\frac{AB}{2}=\frac{25}{2}$.

(2) 在Rt$\triangle ABC$中, $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=20$.

$\because BD=CD=\frac{AB}{2}=\frac{25}{2}$,

$\therefore \angle DCB=\angle DBC$.

$\therefore \cos\angle ABC=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$.

在Rt$\triangle CEB$中, $\angle E=90°$,

$CE=BC\cdot\cos\angle BCE=BC\cdot\cos\angle ABC=16$.

$\therefore DE=CE-CD=\frac{7}{2}$.

在Rt$\triangle DEB$中, $\angle DEB=90°$,

$\therefore \sin\angle DBE=\frac{DE}{BD}=\frac{7}{25}$.

22. 解: (1) 设函数解析式为$y=kx+b$,

得$\begin{cases}10=10k+b,\\6=50k+b.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{10},\\b=11.\end{cases}$

$\therefore y$关于x的函数解析式为$y=-\frac{1}{10}x+11$, 定义域是$10\leqslant x\leqslant 50$.

(2) 由题意, 得$xy=280$,

即$x\left(-\frac{1}{10}x+11\right)=280$,

整理, 得$x^2-110x+2800=0$,

解得$x_1=40$, $x_2=70$.

经检验, $x=70$不合题意, 舍去.

答: 该产品的生产数量为40吨.

23. 证明: (1) $\because \angle BAF=\angle DAE$,

$\therefore \angle BAE+\angle EAF=\angle DAF+\angle EAF$,

$\therefore \angle BAE=\angle DAF$.

$\because$ 四边形$ABCD$是菱形,

$\therefore AB=AD$, $\angle ABE=\angle ADF$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADF$,

$\therefore BE=DF.$

(2) $\because \dfrac{DF}{FC}=\dfrac{AD}{DF}$, $DF=BE$,

$\therefore \dfrac{DF}{FC}=\dfrac{AD}{BE}.$

$\because AD/\!/BC,$

$\therefore \dfrac{DG}{GB}=\dfrac{AD}{BE},$

$\therefore \dfrac{DF}{FC}=\dfrac{DG}{GB},$

$\therefore GF/\!/BC.$

$\because BE=DF$, $BC=DC$,

$\therefore \dfrac{BE}{BC}=\dfrac{DF}{DC},$

$\therefore EF/\!/BD.$

$\therefore$ 四边形$BEFG$是平行四边形.

24. 解: (1) 由二次函数$y=ax^2+6x+c$的图像经过点$A(4,0)$、$B(-1,0)$,

得$\begin{cases}0=16a+24+c,\\0=a-6+c.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-2,\\c=8.\end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的解析式为$y=-2x^2+6x+8$.

(2) $\because$ 点D在线段OC上, 点E在第二象限, $\angle ADE=90°$, $EF\perp OD$,

$\therefore \angle EDF+\angle ADO=\angle DAO+\angle ADO=90°$,

$\therefore \angle EDF=\angle DAO,$

$\therefore \text{Rt}\triangle DFE\backsim\text{Rt}\triangle AOD,$

$\therefore \dfrac{EF}{DO}=\dfrac{DF}{AO}=\dfrac{DE}{AD}.$

在$\text{Rt}\triangle ADE$中, $\angle ADE=90°$, $\tan\angle DAE=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{1}{2},$

$\therefore \dfrac{EF}{DO}=\dfrac{DF}{AO}=\dfrac{1}{2},$

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}DO$, $DF=\dfrac{1}{2}AO.$

$\because OD=t,$

$\therefore EF=\dfrac{t}{2},$

$\because$ 点A的坐标为$(4, 0)$,

$\therefore OA=4$, $DF=2$,

$\therefore OF=t-2.$

(3) 由(1)得, 点C的坐标为$(0, 8)$.

延长CE交x轴于点G, 设点G的坐标为$(x, 0)$,

$\because \angle ECA=\angle OAC,$

$\therefore CG=AG,$

$\therefore \sqrt{x^2+8^2}=\sqrt{(x-4)^2}$, 解得$x=-6$,

$\therefore GO=6.$

由已知, 可得点F在线段OD上,

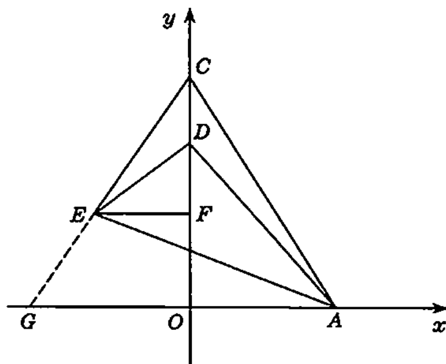
又$\because OF=t-2,$

$\therefore FC=OC-OF=10-t,$

$\because EF/\!/GO,$

$\therefore \dfrac{EF}{GO}=\dfrac{CF}{CO},$

$\therefore \dfrac{\frac{t}{2}}{6}=\dfrac{10-t}{8}$, 解得$t=6$.



25. 解: (1) 在扇形AOB中, $\because OD\perp BC$, $\therefore BD=\dfrac{1}{2}BC.$

$\because BC=1,$

$\therefore BD=\dfrac{1}{2}.$

$\because OB=2,$

$\therefore OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}.$

(2) 存在, 边DE的长度保持不变. 联结AB,

$\because \angle AOB=90°$, $OA=OB=2$.

$\therefore AB=\sqrt{OB^2+OA^2}=2\sqrt{2}.$

$\because OD\perp BC$, $OE\perp AC$,

$\therefore CD=BD$, $CE=AE$,

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2}.$

(3) 联结OC, $\because$ 点C在$\overset{\frown}{AB}$上, $\therefore OC=OB$,

$\because OD\perp BC$,

(下转第9-49页)

一道高考数学试题的魅力赏析

362014　福建省泉州市马甲中学　肖　忠　游明珍

2011年全国高考江西卷理科试题第10题：如图1，一个直径为1的小圆沿着直径为2的大圆内壁按逆时针方向滚动，M和N是小圆的一条固定直径的两个端点．那么，当小圆这样滚过大圆内壁的一周，点M、N在大圆内所绘出的图形大致是 ……………………（　）

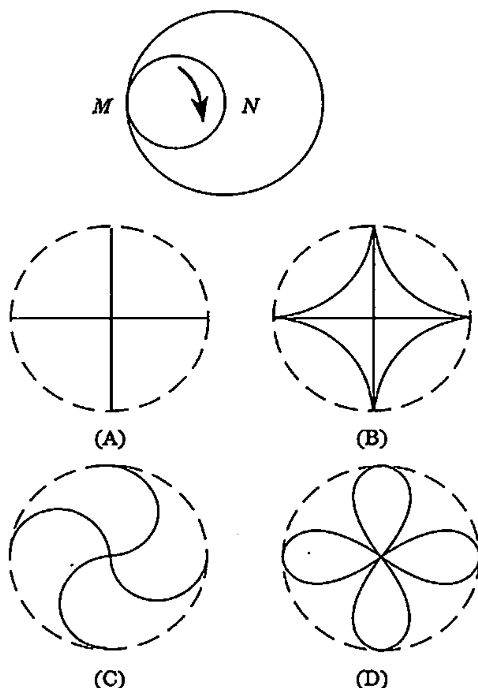


图1

虽说这是一道选择题，经研究感到其魅力十足．

魅力一：具有较强的挑战性

作为高考试题，要在很短的时间内完成，对应试者的知识、能力、智慧有很高的要求，具有较强的挑战性．

在平时的教学中，我们提倡动手操作、实物感知．在考场上，用圆规在草稿纸上分别画出直径是2与1的两个圆，再用小刀将它们划下来，然后在小圆上画出直径MN，依图样摆好两圆，按住大圆，依题目要求滚动小圆，观察点M与点N的运动轨迹，对照选项中的图形，就能得出答案．

当然，此题也可进行如下严谨推导：不妨设直径MN初始位置在水平线上且大圆的圆心为点O(如图2)，当小圆由公共点M位置沿大圆的左下方内壁滚动到点D时，设小圆圆心为点B，原来的点M此时位于点M_1处，由于大圆弧长MD与小圆弧长M_1D相等及大圆半径是小圆半径的2倍，知$2\angle MND=\angle M_1BD$．在小圆中$2\angle M_1ND=\angle M_1BD$，因此，$\angle MND=\angle M_1ND$．又由于点$M$、$M_1$、$N$在直线$DN$的同一侧，故点$M$、$M_1$、$N$共线，即点$M$运动的轨迹在线段$MN$上．不妨设小圆滚动到点$D$时，点$M$在点$E$处，点$N$运动到点$N_1$处，由于$BE=BN_1=BO$，则$\angle EON_1=90°$，可知点$N_1$在与$MO$垂直的直径的下半段．由前面的分析知，当点$M$运动到大圆的圆心点$O$时，点$N$则位于与$MO$垂直的大圆直径的下端点．又由于圆的对称性，当小圆在大圆的右下方、右上方及左上方上滚动时，点M、N运动的轨迹是相互垂直的两直径．

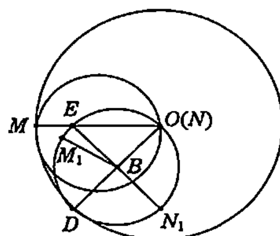


图2

利用直角坐标系，使用解析方法求轨迹也是常用的手段，因此可考虑建立直角坐标系来解决问题．以过大圆圆心C的水平直线为x轴，x轴与大圆的左交点为原点，建立

平面直角坐标系，如图3所示．这样小圆直径MN的初始位置就是线段OC的位置．设点$P(x,y)$是点M轨迹上任意一点，对应此点的小圆圆心为点$B(x_0,y_0)$，设圆B与大圆的公共点为点D．设当小圆由点M沿大圆滚动到点D时，$\angle OCD=\theta$．由于大圆圆弧OD长度等于小圆圆弧PD的长度，且$CD=2BD$，则$\angle PBD=2\theta$．点B坐标满足关系

$$\begin{cases} x_0=1-\dfrac{1}{2}\cos\theta, \\ y_0=-\dfrac{1}{2}\sin\theta, \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

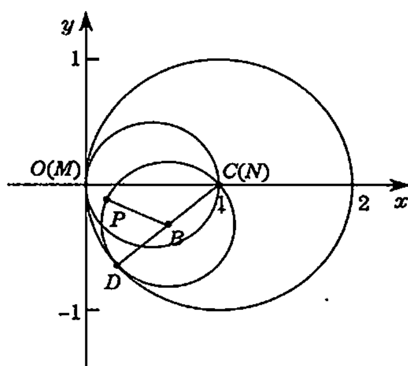


图3

点P坐标满足关系

$$\begin{cases} x=x_0-\dfrac{1}{2}\cos\theta, \\ y=y_0+\dfrac{1}{2}\sin\theta, \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

由①、②得$\begin{cases} x=1-\cos\theta, \\ y=0, \end{cases}$故点$M$轨迹是以点$O$为端点的大圆的直径．由于小圆直径的两个端点关于小圆的圆心成中心对称，则点P的对称点$P'(x',y')$的坐标满足关系$\begin{cases} x'=1, \\ y'=-\sin\theta, \end{cases}$故点$N$的轨迹是过大圆圆心且与点$M$轨迹垂直的大圆直径．

魅力二：具有较高的探究性

此题中大圆的直径是2，小圆的直径是1，若大圆的直径换成3而小圆的直径仍为1，小圆仍沿大圆滚下，点M的轨迹又是什么呢？只要在前面坐标法的基础上稍作改变，即可找到答案．如前面坐标法那样建立平面直角坐标系，设小圆圆心为$B(x_0,y_0)$，设点M轨迹上任意一点$P(x,y)$及$\angle OCD=\theta$．由于大圆圆弧OD长度与小圆圆弧PD的长度相等及大圆半径是小圆半径的3倍，则$\angle PBD=3\theta$，点B坐标满足关系

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{3}{2}-\cos\theta, \\ y_0=-\sin\theta, \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

点P坐标满足关系

$$\begin{cases} x=x_0-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta, \\ y=y_0+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta, \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

由③、④得

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}-\cos\theta-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta, \\ y=-\sin\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta, \end{cases}$$

由超级画板软件可知点M轨迹如图4所示．

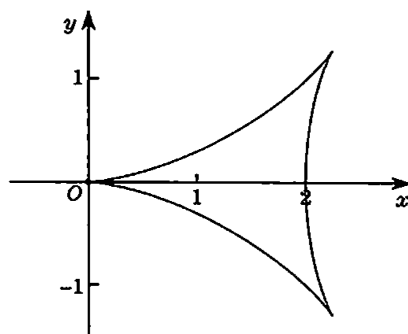


图4

由于点N与点M关于小圆圆心对称，易得点N轨迹方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}-\cos\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta, \\ y=-\sin\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta, \end{cases}$$

由超级画板软件可知点N轨迹如图5所示．

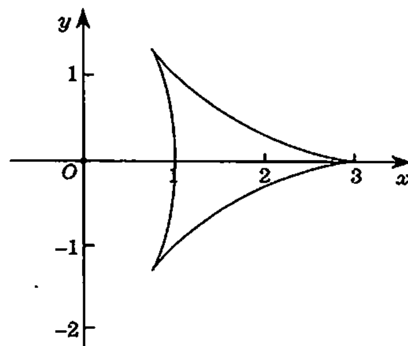


图5

将题中具体数字字母化，设一定圆其半径为R，动圆半径为r，点M轨迹又是什

么? 仍可用坐标方法解决. 同样只要在前面坐标法的基础上作调整便可. 在图6中, 设$\angle OCD=\theta$, 由于定圆圆弧OD长度与动圆圆弧PD的长度相等及大圆半径是小圆半径的$\frac{R}{r}$倍, 则$\angle PBD=\frac{R}{r}\theta$, 点$B$坐标满足关系

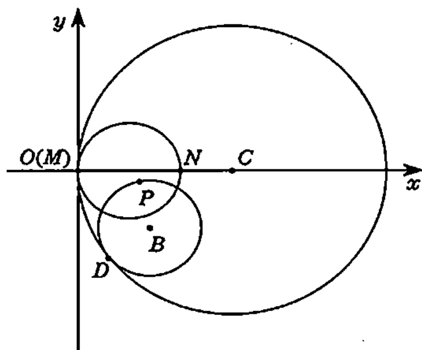


图6

$$\begin{cases}x_0=R-(R-r)\cos\theta,\\ y_0=-(R-r)\sin\theta,\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

点P坐标满足关系

$$\begin{cases}x=x_0-r\cos\left(\frac{R}{r}-1\right)\theta,\\ y=y_0+r\sin\left(\frac{R}{r}-1\right)\theta,\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots⑥$$

由⑤、⑥得

$$\begin{cases}x=R-(R-r)\cos\theta-r\cos\left(\frac{R}{r}-1\right)\theta,\\ y=-(R-r)\sin\theta+r\sin\left(\frac{R}{r}-1\right)\theta,\end{cases}$$

此方程便是点M的轨迹方程.

魅力三: 具有一定的推广性

原题中动圆是在定圆内壁滚动, 动圆与定圆是构成滚动的两个"要件", 这两个"要件"为这个"滚动"问题带来了一定的推广空间. 若将其中的至少一"要件"改换, 会得到一些关于"滚动"的新的命题.

将定圆换成直线, 可得这样一个命题: 如图7, 直径为1的圆放置在直角坐标系的原点, 点P为圆上的一定点(此时与原点重合), 让圆沿x轴滚动, 设点$P(x,y)$的纵坐标与横坐标的函数关系是$y=f(x)$, 则$f(x)$的最小正周期为________.

也可提出求点P的轨迹方程.

若将定圆换成定直线, 把动圆换成椭圆, 可得这样一个命题: 如图8, 周长为3的椭圆放置在直角坐标系的原点, 点P为椭圆上的一定点(此时与原点重合), 让椭圆沿x轴滚动, 设点$P(x,y)$的纵坐标与横坐标的函数关系是$y=f(x)$, 则$f(x)$的最小正周期为________.

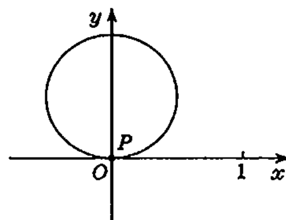


图7

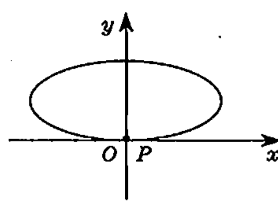


图8

若将原题中的动圆、定圆两个"要件"分别换成正方形与直线, 就能产生2010年全国高考北京卷试题: 如图9, 放置的边长为1的正方形$PABC$沿x轴滚动. 设顶点$P(x,y)$的纵坐标与横坐标的函数关系是$y=f(x)$, 则$f(x)$的最小正周期为________; $y=f(x)$在其两个相邻零点间的图像与x轴所围区域的面积为________.

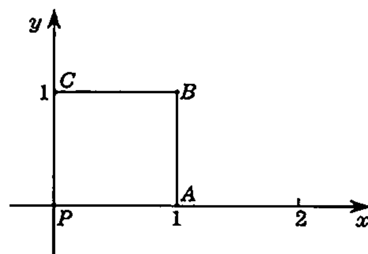


图9

若将原题中的动圆、定圆分别换成"凸轮"与直线, 就能产生2011年全国高考江西卷文科试题: 如图10, 一个"凸轮"放置于直角平面坐标系x轴上方, 其"底端"落在原点O处, 一顶点及中心M在y轴正半轴上, 它的外围由以正三角形的顶点为圆心, 以正三角形的边长为半径的三段等弧组成. 今使"凸轮"沿x轴正向滚动前进, 在滚动过程中"凸轮"每时每刻都有一个"最高点", 其中心也在不断移动位置, 则在"凸轮"滚动一周的过程中, 将其"最高点"和"中心点"所形成的图形按上、下放置, 应大致为 ································ ( )

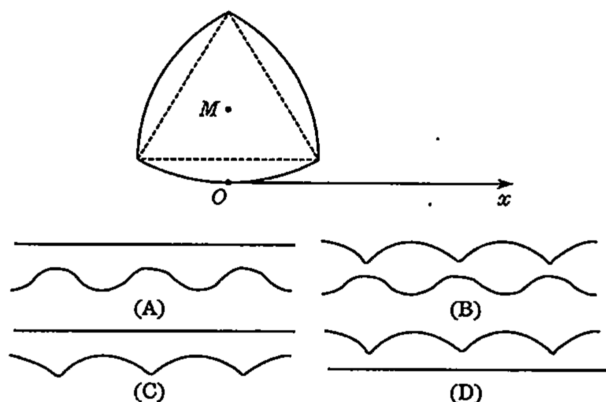


图10

魅力四: 具有较好的欣赏性

美的魅力是不可拒绝的, "体会数学的美学意义"是普通高中数学课程标准的具体目标之一. 数学中有大量的美的元素存在, 如雅致的图形、流畅的曲线、对称的方程等. 信息技术具有丰富的图形呈现, 制作功能有其优势, 它能做到我们用其他手段难以做到或做不到的事情.

原题中点M、N运动的轨迹是相互垂直的两直径, 其图简洁, 对称. 在探究中当大圆的直径由2换成3而小圆的直径仍为1时, 得到点M、N运动的轨迹分别是两个曲边三角形, 从图4、图5可见这两个图形曲线光滑、优美、对称. 在进一步的探究中, 把定圆、动圆半径分别用R、r表示时, 得到点M的轨迹方程是

$$\begin{cases} x = R-(R-r)\cos\theta - r\cos\left(\dfrac{R}{r}-1\right)\theta, \\ y = -(R-r)\sin\theta + r\sin\left(\dfrac{R}{r}-1\right)\theta, \end{cases}$$

虽然方程有三个参量, 但由于数学图形软件有强大的画图功能及动态追踪功能, 我们还是有机会目睹方程所描述的图形. 图11是利用超级画板所画, 此时$\dfrac{R}{r}=1.5855$. 此图形似花朵, 线条流畅. 若利用变量尺不断调整$\dfrac{R}{r}$的比值, 可观看到比值不同时图形的有趣变化. 仔细观察, 发现当$\dfrac{R}{r}$的比值是正整数$n(n>1)$时, 图形的花瓣就恰好是n, 图12是$\dfrac{R}{r}=5$时5瓣花朵, 此图工整、对称并且曲线优美, 让人爽心悦目.

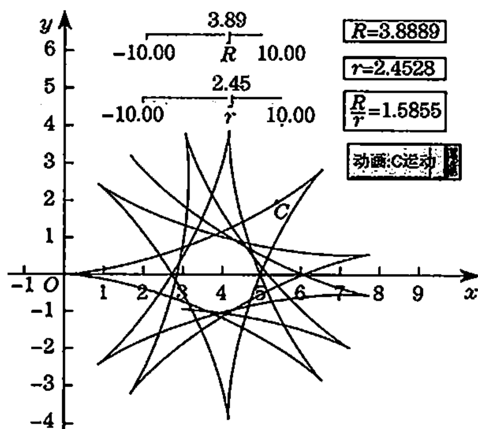


图11

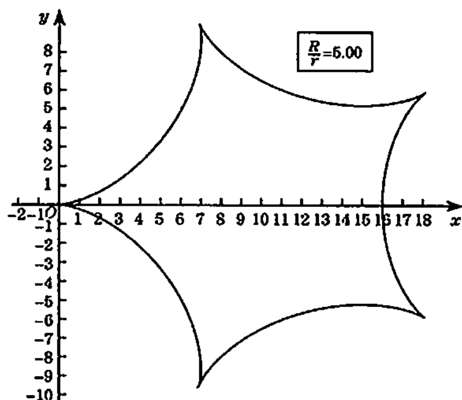


图12

在大多数情况下, 我们总是看一看、做一做各类题目便对它们做出采用还是不用的处理. 有不少好的题, 由于我们的疏忽或对其研究不够, 常不经意间从我们手中滑掉, 沉入题海, 因此其价值也难以体现, 其魅力难以突显. 不少高考题是出于课本又高于课本, 是专家反复推敲而成, 这些试题不仅承载了对知识、能力、方法的考查任务, 而且对我们的教学有重要的影响作用. 对这样的题不仅要做、要用, 而且要研究、要欣赏, 尽放其光彩, 尽显其魅力, 让其功效最大化. 教师在对这样的试题的研究、欣赏中, 可积累知识, 优化知识结构, 增强研究能力, 丰富数学文化, 感受数学的魅力. 总之, 对高考试题的研究、欣赏, 是增进教师专业修养的有效途经, 值得大家去做.

参考文献

[1] 何晓禹, 余继光. 一道高考数学题引起的研究性学习 [J]. 数学教学, 2011(3): 43-46.

[2] 数学课程标准研制组. 普通高中数学课程标准 (实验) 解读 [M]. 南京: 江苏教育出版社, 2004.

"Z+Z" 智能教育平台超级画板

——《立体几何》智能推理功能举例

277500 山东省滕州市第一中学 贾永进 山东省滕州市北辛中学 满孝梅

文 [1]、[2] 详细介绍了 "Z+Z" 智能教育平台超级画板的智能推理功能在平面几何和立体几何方面的应用, 并且文 [2] 提到超级画板在立体几何方面的智能推理功能, 但没有给出例题. 笔者受到启发, 抱着试一试的好奇心探究了其在立体几何智能推理方面的应用, 举一例简要说明课件的制作过程.

例 1 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $VA=VB=AC=BC=2$, $AB=2\sqrt{3}$, $VC=1$, 求二面角 $V-AB-C$ 的大小.

课件制作过程:

(1) 打开超级画板——立体几何软件, 此时自动新建一个名为 ltjihe1 的文档, 点击文件菜单 ⟶ 保存, 在弹出的对话框内填写文件名.

(2) 单击菜单项: 作图 ⟶ 棱锥 ⟶ 三棱锥, 软件自动作出三棱锥 $A-BCD$, 如图 1.

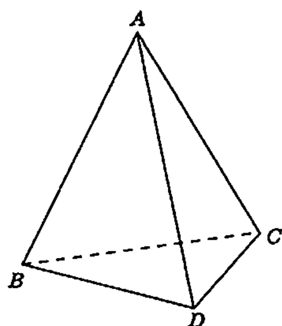


图 1

(3) 双击顶点 A, 在弹出的对话框中 (如图 2) 将名字改为 V. 用同样的方法更改其他顶点的名字, 如图 3.

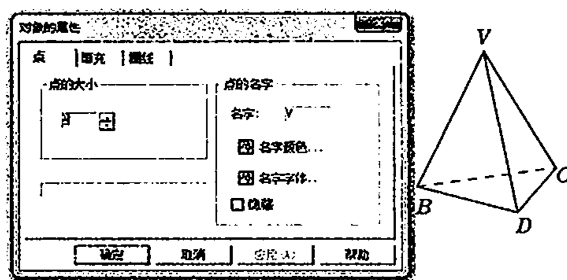


图 2

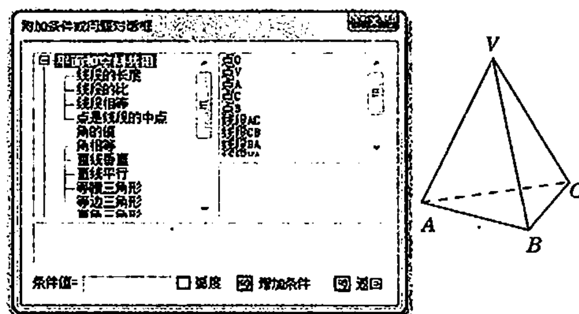


图 3

(4) 单击菜单项: 解题 ⟶ 附加条件, 单击平面和空间共用前面的 "+", 如图 4.

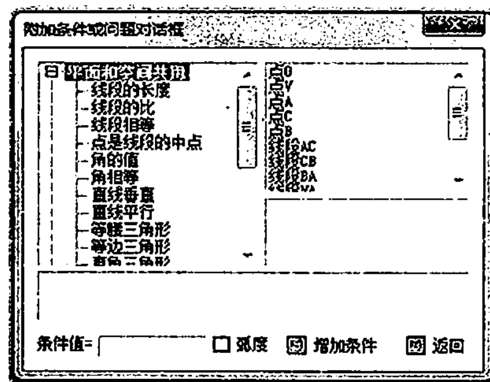


图 4

(5) 单击线段长度, 并双击右侧对象列表中对象线段 VA, 线段 VA 出现在右侧下栏方

框内, 此时线段 VA 变粗, 如图 5 (注: 如果误选线段 VB, 双击右侧下栏双框内对象线段 VB, 则线段 VB 消失, 然后重新选择即可,下同).

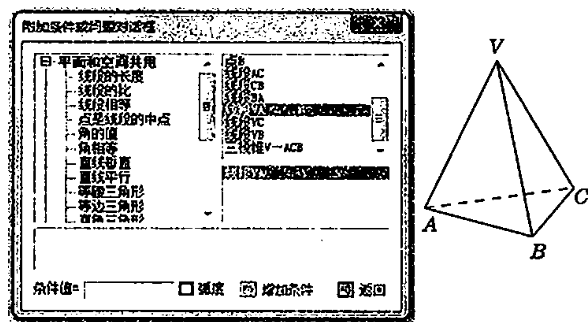


图 5

(6) 单击右侧下栏方框内线段 VA, 在条件值对应的编辑框内输入 2, 如图 6.

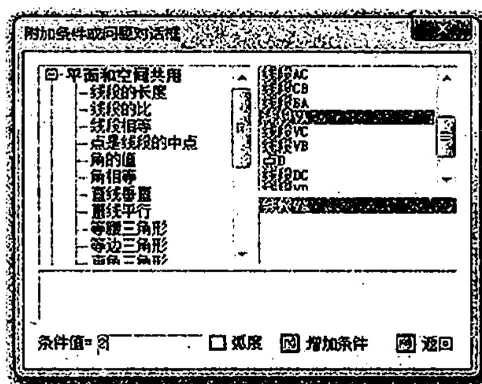


图 6

(7) 单击增加条件按钮, 如图 7.

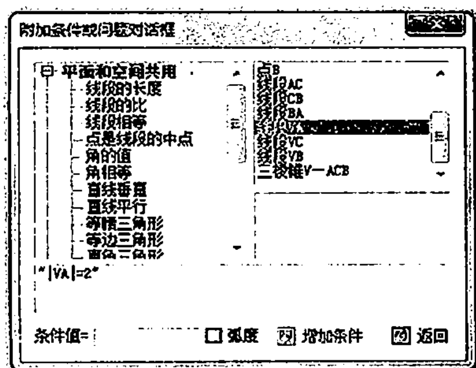


图 7

(8) 用同样的方法为其他线段赋值, 最后单击返回按钮, 如图 8.

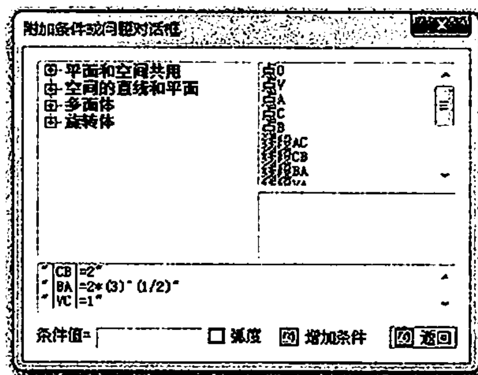


图 8

(9) 单击菜单项: 解题 ⟶ 问题, 单击空间的直线和平面前面的 "+" 展开, 并单击 "二面角", 如图 9.

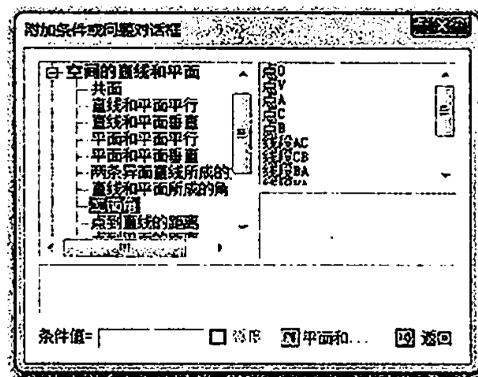


图 9

(10) 双击右侧对象列表框中对象点 V, 双击线段 AB, 双击点 C, 此时点 V, 线段 AB, 点 C 出现在右侧下栏方框内, 如图 10.



图 10

(11) 单击增加问题按钮 (图 11 左数第三个按钮), 求二面角 $V-AB-C$ 出现问题框内, 如图 11.

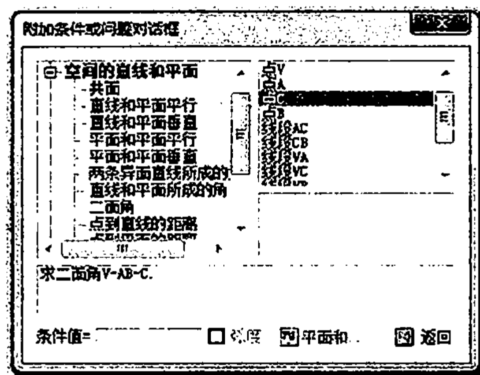


图 11

(12) 单击返回按钮 (图 11 右数第一个按钮).

(13) 单击菜单项: 解题 ⟶ 自动解题,等推理结束后, 单击工作区中问题选项卡, 在问题界面中单击问题前面的 "+" 展开, 结果是问题还没有解决, 给出了一些解决问题的提示, 如图 12.

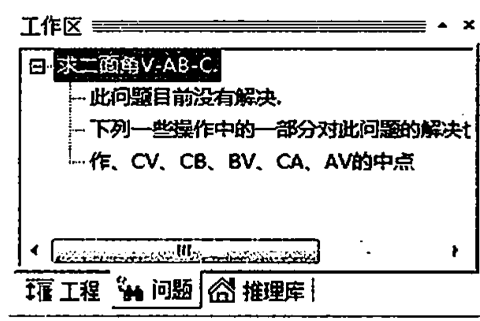


图 12

(14) 根据提示作出线段 AB 的中点 D, 连结 VD, CD. 然后单击菜单选项: 解题 ⟶ 自动解题, 等推理结束后, 单击工作区中问题选项卡, 在问题界面中单击问题前面的 "+" 展开, 得到问题的解答, 如图 13.

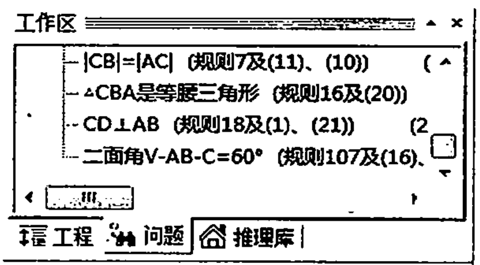


图 13

(15) 单击工作区中推理选项卡, 看到推理库共推出 579 条信息, 用时少于 1 秒, 如图 14.

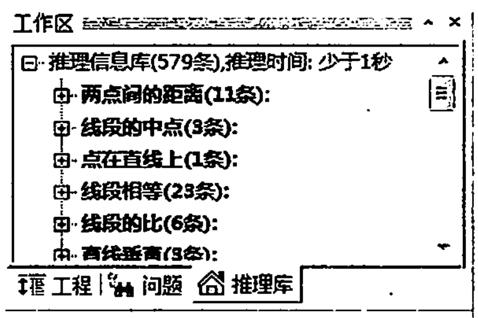


图 14

(16) 拖动工作区中滑条, 找到二面角, 并单击二面角前面的 "+" 号, 然后找到要求的二面角 $V-AB-C$, 单击前面的 "+", 如图 15.

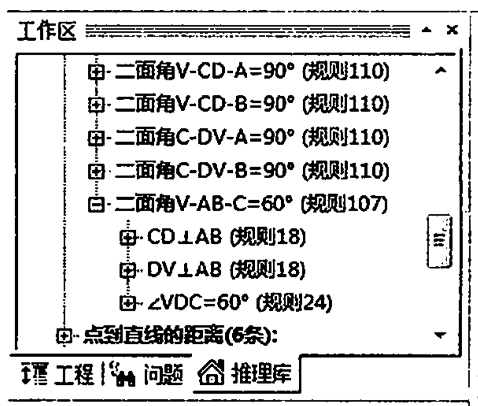


图 15

(17) 继续打开各条件前的 "+", 直到认为条件显然成立或为已知为止. 然后将鼠标指向二面角 $V-AB-C=60°$, 单击鼠标右键, 求二面角 $V-AB-C$ 大小的解题过程 (包括题目) 就出现在作图区内, 如图 16 (注: 双击文本, 可以对文本进行编辑修改, 拖动文本框四周的黑色方块, 可以调整文本的显示内容和位置, 此处从略).

如图: D是线段AB的中点.

若: "|VC|=1", "|BA|=2*(3)^(1/2)", "|CB|=2", "|AC|=2", "|VB|=2", "|VA|=2"

求二面角V-AB-C.

解:

|VC|=|VD| (显然) (0)

|VC|=|CD| (显然) (1)

△VCD是等边三角形 (规则21及(0)、(1)) (2)

∠VDC=60° (规则24及(2)) (3)

DV⊥AB (显然) (4)

CD⊥AB (显然) (5)

二面角V-AB-C=60° (规则107及(3)、(4)、(5)) (6)

图 16

(18) 点击推理库的其他信息看看: 比如直线VA与平面VCD(软件中显示为$\langle VA$, 面$DVC\rangle$)所成的角. 单击工作区中推理库选项卡中直线和平面所成的角前面的“+”展开, 如图17, 由此可知直线VA与平面VCD所成的角大小为60°.

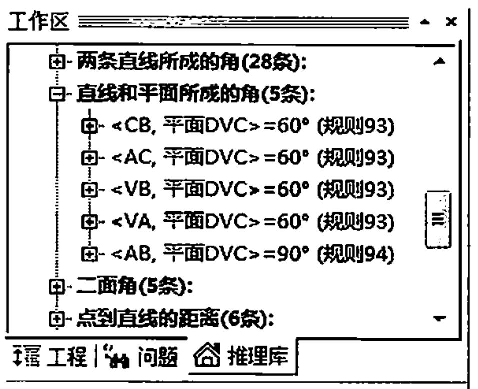


图17

(19) 单击“$\langle VA$, 面$DVC\rangle = 60°$”前面的“+”, 逐个展开各条件前的加号, 直到自己满意为止, 将鼠标指向“$\langle VA$, 面$DVC\rangle = 60°$”, 然后单击鼠标右键, 解答连同题目本身一起出现在作图工作区内, 如图18 (注: 图18的文本是通过编辑修改之后的).

如图: D是线段AB的中点.若: "|VC|=1", "|BA|=2*(3)$^{\frac{1}{2}}$",
"|CB|=2","|AC|=2", "|VB|=2", "|VA|=2"
求<VA, 平面DVC>.
解:"$VD^2=BV^2+DB^2-2BV\ DB\cos\angle VBD$
$=(\sqrt{3})^2+(2)^2-2*(\sqrt{3})*(2)*(\frac{3}{2*\sqrt{3}})=1$
|VD|=1" (显然) (0)
"|DA|=(3)$^{\frac{1}{2}}$" (显然) (1)
"|VA|=2" (已知) (2)
$\cos\angle DVA=\frac{DV^2+VA^2-AD^2}{2*DVVA}$
$=\frac{(1)^2+(2)^2-(\sqrt{3})^2}{2*(1)*(2)}=\frac{1}{2}$
$\angle DVA=60°$ (规则54及(0)、(1)、(2)) (3)
$DV\perp AB$ (显然) (4)
$CD\perp AB$ (显然) (5)
$AB\perp$平面DVC (规则89及(4)、(5)) (6)
<VA, 平面DVC>=60° (规则93及(3)、(6)) (7)

图18

此题到此还远没有结束, 推理库中还有很多信息可以探究, 留给有兴趣的读者. 智能推理是超级画板注册版的功能, 本文所有操作都是在超级画板——《立体几何》注册版下进行的. 超级画板给一线教师的备课和教学带来极大的方便, 尽管只给出了作辅助线的提示, 并没有指明作哪条辅助线, 笔者认为这恰是该软件的优点之一, 给学生留下了思考的空间.

参考文献

[1] 张景中, 彭翕成.《超级画板》自动推理功能简介 [J]. 数学教学, 2008(9): 3–6.

[2] 张景中, 彭翕成. 数学教育技术 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009, 12.

(上接第9–41页)

$\therefore \angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC$,

同理, $\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC$,

$\therefore \angle DOE=\frac{1}{2}\angle BOC+\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB$.

$\because \angle AOB=90°$,

$\therefore \angle DOE=45°$.

过点D作$DH\perp OE$, 垂足为H,

在Rt$\triangle OBD$中, $OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=\sqrt{4-x^2}$.

在Rt$\triangle ODH$中, $\angle DOH=45°$,

$OH=DH=OD\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4-x^2}$.

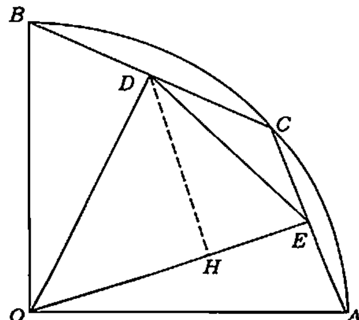
在Rt$\triangle DEH$中, $HE=\sqrt{DE^2-DH^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

$\therefore OE=OH+HE=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

$\because S_{\triangle DOE}=\frac{1}{2}OE\cdot DH$,

$\therefore$ 函数解析式为$y=\frac{4-x^2+x\sqrt{4-x^2}}{4}$.

定义域为$0<x<\sqrt{2}$.



编后漫笔

数学教育的自信和自觉

张奠宙 赵小平

2012年6月11日《文汇报》头版刊登记者杨逸琪的文章, 在回答中国学界为何缺少"趋势学家"时, 中欧国际工商学院名誉院长刘吉认为"这很大程度上同中国学者和舆论跟着西方学界的话语系统亦步亦趋有关, 学术需要自信和自觉. 中国学者要敢于发表自己的独特看法, 中国媒体也要乐于传播国内学者的观点. 当然, 学术界领导更应该支持中国学者的创新和媒体对创新的传播. 只有这样, 中国趋势学家的声音才会越来越响".

这段话如果用来评论中国教育界, 似乎也很合适. 中国教育有自己的话语权吗? 现在盛行的是杜威儿童中心主义、建构主义教育、后现代教育理论等, 中国自己的话语不见了, "传道、授业、解惑"的经典名言几乎已弃之不用. 我们的"双基"、"四基"是强调在坚实基础之上谋求学生的发展, 这些和国外的"回到基础"方向是一致的, 却也没有认真地总结自己.

中国数学教育也常受他人趋势的连累, 一向被当做"数学基础过剩"、"学科中心主义"、"死记硬背"、"满堂灌"等等饱受批判. 有人讽刺说"你背九九表, 我拿诺贝尔", 似乎背了九九表, 就拿不到诺贝尔奖了, 荒谬之极.

不过, 近年来中国数学教育学科自身正在走向独立. 一本《How Chinese Learn Mathematics (华人如何学习数学)》已经在2004年推出 (江苏教育出版社2005年发行中文版), 眼下它的姐妹篇《How Chinese Teach Mathematics (华人如何教数学)》也在紧锣密鼓地编写之中. 今年7月的国际数学教育大会(首尔)上会有一个"华人数学教育论坛", 目的也是向国际上介绍中国数学教育.

话语权, 靠自己去争取, 等是等不来的.

(上接第9–14页)

同时, 要依据题型的特点, 适时、适度地渗透数学思想方法, 实现讲评试卷的同时有效复习基本知识与方法的目的. 同时, 试卷讲评过程中要给学生留出充足的时间, 让他们去探究试题的来龙去脉, 分析问题的解题策略, 思考问题的推广与引申. 当学生能够用联系、发展的眼光看问题时, 我们的试卷讲评才能真正发挥实效, 学生才能真正提高思维能力, 解题教学也才能跳出题海.

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2012年第9期(总第301期)

名誉主编: 张奠宙

主编: 赵小平

常务副主编: 忻重义

发行范围: 公开

电话: 021-62232712

主管单位: 中华人民共和国教育部

主办单位: 华东师范大学

出版: 上海《数学教学》杂志社

邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)

广告许可证: 3100720050001

印刷: 华东师范大学印刷厂

国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局

国内订阅: 全国各邮电局

电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 5.50元 国内统一连续出版物号: CN31-1024/G4 每月12日出版 代号: 4-357